Technische Universität Hamburg-Harburg
Institut für Numerische Simulation
Dr. Jens-Peter M. Zemke

WS 2008/2009

Klausur zur Vordiplom-Prüfung

Numerische Verfahren

13. Februar 2009

Sie haben **90** Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer in DRUCKSCHRIFT.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **Druckschrift** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:														
Vorname:														
Matr.-Nr.														

Ich bin darüber belehrt worden, dass meine Ausarbeitung nur dann als Prüfungsleistung bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Lösen Sie die folgenden 12 Aufgaben!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Punkte												

$\boldsymbol{\Sigma}$	

Aufgabe 1: (4+4 Punkte)
Wie groß ist der Abstand von π zur nächstgelegenen Maschinenzahl $\mathrm{fl}(\pi)$ auf einem handelsüblichen Rechner (einem Rechner mit IEEE 754-Arithmetik und demnach mit einer Maschinengenauigkeit von $2^{-53} \approx 10^{-16}$) ungefähr?

Wenn Sie annehmen, dass der Sinus auf dem Rechner den Wert zurückgibt, der dem exakten Wert des Eingabearguments am nächsten liegt, was erwarten Sie dann bei der Berechnung von

$$y = \sin(\mathrm{fl}(10^{16} \cdot \mathrm{fl}(\pi)))$$

für einen Wert?

Lösung zu Aufgabe 1: Der relative Abstand der auf dem Rechner verwendeten Approximation zu der tatsächlichen Zahl ist durch die Maschinengenauigkeit beschränkt, also gilt für den absoluten Abstand

$$|\pi - \mathrm{fl}(\pi)| \leqslant 2^{-53}\pi \approx 3.15 \cdot 10^{-16}. \qquad \text{(4 Punkte)}$$

Damit wird

$$\mathrm{fl}(10^{16} \cdot \mathrm{fl}(\pi)) = 10^{16}\pi + z$$

mit einem durch $|z| < 3.2$ beschränkten Term gelten. Da der Sinus 2π-periodisch ist, gilt

$$\sin(\mathrm{fl}(10^{16} \cdot \mathrm{fl}(\pi))) = \sin(10^{16}\pi + z) = \sin(z),$$

und da über z nur bekannt ist, dass es ungefähr zwischen $-\pi$ und π liegt, kann man so ungefähr jedes Ausgabeargument zwischen -1 und 1 erwarten, wobei wir stillschweigend davon ausgehen, dass auch der auf dem Rechner implementierte Sinus das Intervall $[-1, 1]$ nicht verlässt. (4 Punkte)

Der auf einem IEEE 754-konformen Rechner unter MATLAB ausgerechnete Wert ist gegeben durch

```
y = sin(1e16*pi)
y =
  -3.752128900123344e-01
```

und unterscheidet sich deutlich vom gewünschten Ergebnis 0.

Aufgabe 2: (7 Punkte)
Geben Sie das Interpolationspolynom für den Datensatz

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
y_i	0	0	0	1	0	0	0

an. Bitte beachten Sie: Es ist ausdrücklich nicht verlangt, das Polynom auf die Gestalt $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ zu bringen.

Lösung zu Aufgabe 2: Es handelt sich um ein Lagrange-Basispolynom, genauer, um $\ell_3(x)$ zu den vorgegebenen Daten, da dieses Polynom die Interpolationsaufgabe $\ell_3(x_j) = \delta_{3,j}$ löst. Diese Polynom ist in der Lagrangeschen Form gegeben als

$$\begin{aligned}
\ell_3(x) &= \prod_{\substack{i=0\\i\neq 3}}^{6} (x - x_i) \Bigg/ \prod_{\substack{i=0\\i\neq 3}}^{6} (x_3 - x_i) \\
&= \frac{(x+3)(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)}{(3)(2)(1)(-1)(-2)(-3)} && \text{(7 Punkte)} \\
\Bigg(\quad &= -\frac{1}{36}x^6 + \frac{7}{18}x^4 - \frac{49}{36}x^2 + 1. \quad \Bigg)
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: (5 Punkte)
Geben Sie für den Datensatz

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
y_i	0	0	0	1	0	0	0

den Funktionswert des zugehörigen Interpolationspolynomes $p_6(x)$ an der Stelle $\tilde{x} = 1/2$ an.

Lösung zu Aufgabe 3: Wir haben eben gesehen, dass das Interpolationspolynom zu den gegebenen Daten ein Lagrange-Basispolynom ist. Einsetzen von $\tilde{x} = 1/2 = 0.5$ ergibt nach kurzer Rechnung:

$$\begin{aligned}
\ell_3(0.5) &= \frac{(0.5+3)(0.5+2)(0.5+1)(0.5-1)(0.5-2)(0.5-3)}{(3)(2)(1)(-1)(-2)(-3)} \\
&= \frac{175}{256} = 0.68359375. && \text{(5 Punkte)}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4: (5+5 Punkte)
Was ist eine Quadraturformel? Berechnen Sie eine Approximation des Integrales

$$\int_0^\pi \sin(x)\, dx = \cos(\pi) - \cos(0) = 2.$$

Lösung zu Aufgabe 4: Eine Quadraturformel ist eine Formel zur numerischen Annäherung eines Integrales, welche auf Funktionsauswertungen der Funktion unter dem Integral basiert und allgemein (in der Vorlesung „Numerische Verfahren“) die Gestalt

$$\int_0^1 f(x)\, dx \approx \sum_{j=0}^{n} \omega_j f(x_j)$$

hat. Die Angabe der Stützstellen $\{x_j\}_{j=0}^n$ und der Gewichte $\{\omega_j\}_{j=0}^n$ bestimmt in eindeutiger Weise eine Quadraturformel. (5 Punkte)

Die Mittelpunkt- oder Rechteckregel liefert als approximativen Wert des Integrales

$$\int_0^\pi \sin(x)\,dx \approx (\pi - 0)\cdot \sin(\pi/2) = \pi \approx 3.1416,$$

die Trapezregel liefert

$$\int_0^\pi \sin(x)\,dx \approx (\pi - 0)\cdot \frac{\sin(0)+\sin(\pi)}{2} = 0,$$

und die Simpson-Regel liefert

$$\int_0^\pi \sin(x)\,dx \approx (\pi - 0)\cdot \frac{1}{6}(\sin(0) + 4\sin(\pi/2) + \sin(\pi)) = \frac{2\pi}{3} \approx 2.0944.$$

War eine solche (oder andere, ähnliche) Näherung angegeben worden, so ergab dieses 5 Punkte.

Aufgabe 5: (7 Punkte)
Geben Sie die Polynominterpolation nach Lagrange oder Newton wieder.

Lösung zu Aufgabe 5: Die Lagrangsche Interpolation zu den Datenpaaren $\{(x_j, y_j)\}_{j=0}^n$ mit $x_i \neq x_j$ für alle $i \neq j$ ist eine Vorschrift, um das eindeutige Polynom p vom Höchstgrad n zu berechnen, das die Interpolationsbedingungen

$$p(x_j) = y_j, \quad j = 0, 1, \ldots, n$$

erfüllt. Es läßt sich leicht explizit angeben als

$$p(x) = \sum_{j=0}^n y_j \ell_j(x),$$

wobei die Lagrangeschen Basispolynome ℓ_j gegeben sind durch die Interpolationspolynome zu den speziellen Aufgaben

$$\ell_j(x_i) = \delta_{ij}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n, \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$

und explizit angegeben lauten

$$\ell_j(x) = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^n (x - x_i) \Bigg/ \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^n (x_j - x_i)\,, \quad j = 0, \ldots, n. \qquad \text{(7 Punkte)}$$

Die Newtonsche Interpolationsformel zur Interpolation der Datenpaare $\{(x_j, y_j)\}_{j=0}^n$ mit $x_i \neq x_j$ für alle $i \neq j$ ist gegeben durch die Formel

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} [x_0, \ldots, x_j] \prod_{k=0}^{j-1} (x - x_k),$$

wobei die sogenannten dividierten Differenzen $[x_i, \ldots, x_j]$ rekursiv definiert sind durch

$$\begin{aligned} [x_j] &:= y_j, \\ [x_i, \ldots, x_j] &:= \frac{[x_{i+1}, \ldots, x_j] - [x_i, \ldots, x_{j-1}]}{x_j - x_i}, \quad j > i \geqslant 0. \end{aligned}$$

(7 Punkte)

Aufgabe 6: (4+6 Punkte)
Berechnen Sie die Pseudonormallösungen der folgenden Ausgleichsprobleme:

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|_2 = \min, \quad \left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}_2 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = \min .$$

Lösung zu Aufgabe 6: Die aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Spalten der ersten Matrix eindeutige Lösung des ersten Ausgleichsproblemes liest man ab zu

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

(4 Punkte)

oder rechnet Sie mittels der Normalgleichungen oder der QR-Zerlegung aus.

Die Lösung des zweiten Ausgleichsproblemes ist nicht eindeutig. Aus den (logischer- und notwendigerweise singulären) Normalgleichungen

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sieht man aber sofort, dass der Vektor

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Lösung mit kürzestmöglicher Länge, also gerade die gesuchte Pseudonormallösung ist. (6 Punkte)

Aufgabe 7: (5+4+7 Punkte)
Welche der Matrizen

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -\pi \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ist symmetrisch positiv definit? Begründen Sie Ihre Antworten.

Lösung zu Aufgabe 7: Alle Matrizen sind symmetrisch. Die Matrix $\boldsymbol{A}_1$ hat die führenden Hauptminoren

$$\det(2) = 2 > 0, \quad \det(\boldsymbol{A}_1) = 4 - 1 = 3 > 0,$$

ist also positiv definit. (5 Punkte)

Die Matrix $\boldsymbol{A}_2$ hat die führenden Hauptminoren

$$\det(-\pi) = -\pi < 0,$$

ist also nicht positiv definit. (4 Punkte)

Die Matrix $\boldsymbol{A}_3$ hat die führenden Hauptminoren

$$\det(2) = 2 > 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5 > 0, \quad \det(\boldsymbol{A}_3) = 8 > 0,$$

ist also positiv definit. (7 Punkte)

Alternativ hat man schnell gesehen, dass der Vektor

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von $\boldsymbol{A}_3$ zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ ist, der Vektor

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von $\boldsymbol{A}_3$ zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$ ist, und der Vektor

$$\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von $\boldsymbol{A}_3$ zum Eigenwert $\lambda_3 = 4$ ist, kurz geschrieben als

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt dann auch sofort

$$\det(\boldsymbol{A}_3) = \prod_{j=1}^{3} \lambda_j = 1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$$

ohne eine irgendwie geartete Laplace-Entwicklung der Determinante.

Die Eigenwerte sind alle positiv, dieses ist ein äquivalentes Kriterium für positive Definitheit einer symmetrischen Matrix. Meist würde man aber nicht dieses Kriterium verwenden, sondern eine Cholesky-Zerlegung berechnen. Existiert eine (reguläre) Cholesky-Zerlegung, so ist die Matrix positiv definit.

Aufgabe 8: (4+4+6 Punkte)
Geben Sie den QR-Algorithmus in der Grundform und mit Shifts wieder. Konvergieren die so erzeugten Matrizen $\boldsymbol{A}_j$ immer gegen eine feste obere Dreiecksmatrix?

Lösung zu Aufgabe 8: Der QR-Algorithmus mit Shifts ist gegeben durch

Für $j = 0, 1, \ldots$ (bis zur Konvergenz oder zur gewünschten Genauigkeit)
  wähle einen Shift κ_j (z. B. das Element rechts unten in $\boldsymbol{A}_j$)
  QR-zerlege $(\boldsymbol{A}_j - \kappa_j \boldsymbol{E}) = \boldsymbol{Q}_j \boldsymbol{R}_j$
  bilde $\boldsymbol{A}_{j+1} = \boldsymbol{R}_j \boldsymbol{Q}_j + \kappa_j \boldsymbol{E}$ (4 Punkte)

Der QR-Algorithmus ohne Shifts ist durch die Wahl der Shifts als $\kappa_j = 0$ im QR-Algorithmus mit Shifts gegeben. (4 Punkte)

Die so erzeugten Matrizen $\boldsymbol{A}_j$ konvergieren, wenn überhaupt, nur im Wesentlichen, d.h., nur der untere Anteil, also die Diagonalelemente gegen die Eigenwerte, und das darunter stehende Dreieck gegen Null. Für den QR-Algorithmus in der Grundform ist wohlbekannt, dass die Anwendung auf eine beliebige (nichtdiagonale) orthogonale Matrix zu Stagnation des Algorithmus führt und dieser daher niemals konvergiert.

Solch ein Verhalten läßt sich auch für den QR-Algorithmus mit Rayleigh-Quotienten-Shift erzielen, jede nicht-diagonale orthogonale Matrix mit einer Null in der letzten Matrixposition führt zur Stagnation. Solche Matrizen existieren, als Beispiel sei die sogenannte Flip-Matrix

$$\boldsymbol{F}_n = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

genannt, welche nur Einsen entlang der Anti-Diagonalen und Nullen sonst enthält. Der Shift ändert $\boldsymbol{F}_n$ für $n \geqslant 2$ nicht, also ist die QR-Zerlegung gegeben als $\boldsymbol{F}_n = \boldsymbol{F}_n \cdot \boldsymbol{E}_n$, und die umgekehrte Multiplikation und der Shift zurück ergibt wieder $\boldsymbol{F}_n$.

Für noch allgemeinere Shift-Strategien (welche nicht im Skript behandelt wurden; als Beispiel seien die Wilkinson-Shifts genannt) werden die Beispiele, welche eine langsame oder gar keine Konvergenz aufzeigen, meist recht kompliziert. Heutige Implementationen des QR-Algorithmus, wie die in LAPACK und somit in MATLAB, verwenden sogenannte Ausnahme-Shift-Regeln (engl.: *exceptional shift strategies*).

Aufgabe 9: (4+3+6 Punkte)
Geben Sie die (ungefähre) Lage der Eigenwerte der folgenden Matrizen an:

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} -\pi \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung zu Aufgabe 9: Man kann den Satz von Geršgorin verwenden. Für $\boldsymbol{B}_2$ ergibt dieser den einzigen Eigenwert $-\pi$ (3 Punkte), die Eigenwerte von $\boldsymbol{B}_1$ liegen aufgrund der Symmetrie $\boldsymbol{B}_1^H = \boldsymbol{B}_1$ im Schnitt der reellen Achse und des komplexen Einheitskreis (4 Punkte), sind also ± 1, und die Eigenwerte von $\boldsymbol{B}_3$ liegen aufgrund der Symmetrie von $\boldsymbol{B}_3$ im Schnitt der reellen Achse und der Vereinigung der Kreise mit Radius 1 um 2 und Radius 2 um 3, also im reellen Intervall $[1, 5] \subset \mathbb{R}$ (6 Punkte).

In allen Fällen konnte man die Eigenwerte aber auch problemlos (mit einer eventuell etwas längeren Rechnung) berechnen, für die Matrix $\boldsymbol{B}_3$ vergleiche mit der Lösung zu Aufgabe 7, Matrix $\boldsymbol{A}_3$.

Aufgabe 10: (6+6 Punkte)
Es sei eine Matrix $\boldsymbol{A}$ und ein Startvektor $\boldsymbol{u}^0$ gegeben als

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}^0 = \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Was passiert bei Anwendung der Potenzmethode mit Normierungsvektor

$$\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

Falls Konvergenz eintritt: Wie schnell konvergieren die Vektoren $\boldsymbol{u}^i$ aus der Potenzmethode gegen welchen Eigenvektor? Falls keine Konvergenz eintritt: Wieso nicht?

Lösung zu Aufgabe 10: Die Eigenvektoren und Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{A}$ sind gegeben durch die Zerlegung

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Es handelt sich also um eine Matrix mit betragsmäßig getrennten Eigenwerten 1 und 8, die erwartete Konvergenzgeschwindigkeit gegen das betragsmaximale (dominante) Eigenpaar

$$\left(8, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

ist demnach die geometrische (lineare) Konvergenz charakterisiert durch den Konvergenzfaktor $q = 1/8 = 0.125$.

Die Anwendung der Potenzmethode liefert die Iterierten

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \\
k_1 &= \boldsymbol{e}_1^T \boldsymbol{v}_1 = 2, \\
\boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{v}_1/k_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 27/2 \end{pmatrix}, \\
k_2 &= \boldsymbol{e}_1^T \boldsymbol{v}_2 = 5, \\
\boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{v}_2/k_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 27/10 \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{v}_3 &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 7.4 \\ 21.9 \end{pmatrix}, \\
k_3 &= \boldsymbol{e}_1^T \boldsymbol{v}_3 = 7.4, \\
\boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{v}_3/k_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 219/74 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

es scheint sich also um lineare Konvergenz mit dem Konvergenzfaktor $q = 1/8$ gegen das dominante Eigenpaar zu handeln. (6+6 Punkte)

Allgemein gilt aufgrund der wegen

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

erfolgenden Zerlegung des Startvektors in seine Eigenvektoranteile

$$\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{-3}{7} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{7}$$

und aus

$$\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\cdot\frac{-3}{7}\cdot 1^i + \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{7}\cdot 8^i = \begin{pmatrix}8^i+6\\3\cdot 8^i-3\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{7}$$

die Darstellung

$$\begin{aligned} k_i &= \frac{8^i+6}{8^{i-1}+6} = 8\cdot\frac{1+6\cdot q^i}{1+6\cdot q^{i-1}} \to k_\infty = 8,\\ \boldsymbol{u}_i &= \begin{pmatrix}1\\ \dfrac{3\cdot 8^i-3}{8^i+6}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 3\cdot\dfrac{1-1\cdot q^i}{1+6\cdot q^i}\end{pmatrix} \to \boldsymbol{u}_\infty = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Aufgabe 11: (6+6 Punkte)
Was ist die inverse Iteration? Es seien die Matrix $\boldsymbol{A}$ und der Startvektor $\boldsymbol{u}^0$ aus der letzten Aufgabe gegeben. Wie schnell konvergiert die inverse Iteration mit dem Normierungsvektor

$$\boldsymbol{\ell} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

mit gemäß

$$\kappa_i = \frac{(\boldsymbol{u}^i)^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^i}{(\boldsymbol{u}^i)^H\boldsymbol{u}^i}$$

aufdatiertem Shift? Der Startshift sei hierbei (wie üblich) gewählt als

$$\kappa_0 = \frac{(\boldsymbol{u}^0)^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^0}{(\boldsymbol{u}^0)^H\boldsymbol{u}^0} = 2.$$

Sie brauchen bezüglich der Konvergenzgeschwindigkeit nur eine begründete Vermutung zu äußern, die Inverse Iteration wird nämlich bei reiner Handrechnung schnell rechenaufwändig.

Lösung zu Aufgabe 11: Sei eine Matrix $\boldsymbol{A}$ und ein Startvektor $\boldsymbol{u}^0$ gegeben. Eine Variante der inversen Iteration (mit aufdatiertem Shift) ist gegeben durch die Schleife

Für $j = 0, 1, \ldots$ (bis zur Konvergenz oder zur gewünschten Genauigkeit)
  wähle einen Shift κ_j
  löse $(\boldsymbol{A} - \kappa_j\boldsymbol{E})\boldsymbol{v}^{j+1} = \boldsymbol{u}^j$
  normiere: $\boldsymbol{u}^{j+1} = \boldsymbol{v}^{j+1}/\boldsymbol{\ell}^T\boldsymbol{v}^{j+1}$ (oder $\boldsymbol{u}^{j+1} = \boldsymbol{v}^{j+1}/\|\boldsymbol{v}^{j+1}\|_2$)

Für die Beschreibung des Algorithmus bekam man 6 Punkte.

Zuerst wird das Gleichungssystem

$$(\boldsymbol{A} - \kappa_0\boldsymbol{E})\boldsymbol{v}^1 = \begin{pmatrix}2-2 & 2\\ 3 & 7-2\end{pmatrix}\boldsymbol{v}^1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \boldsymbol{u}^0$$

nach $\boldsymbol{v}^1$ gelöst, das Ergebnis ist

$$\boldsymbol{v}^1 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Die Normierung mit dem angegebenen Normierungsvektor ergibt

$$\boldsymbol{u}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3/5 \end{pmatrix},$$

der nächste Rayleigh-Quotienten-Shift ist demnach gegeben durch

$$\kappa_1 = \frac{(\boldsymbol{u}^1)^H \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^1}{(\boldsymbol{u}^1)^H \boldsymbol{u}^1} = \frac{1}{5^2+3^2}\begin{pmatrix} -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{38}{34} = \frac{19}{17} \approx 1.1176.$$

An dieser Stelle ist bereits zu vermuten, dass die Inverse Iteration mit diesem Startvektor und dieser Skalierung gegen das (umskalierte) Eigenpaar

$$\left(1, \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}\right)$$

konvergiert. Die Konvergenz wird aufgrund der nicht vorhandenen Symmetrie nicht kubisch und aufgrund der Aufdatierung des Shifts mindestens quadratisch sein. (6 Punkte)

Die nächsten Iterierten berechnen sich durch Auflösung von

$$(\boldsymbol{A} - \kappa_1 \boldsymbol{E})\boldsymbol{v}^2 = \begin{pmatrix} 2 - \frac{19}{17} & 2 \\ 3 & 7 - \frac{19}{17} \end{pmatrix}\boldsymbol{v}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3/5 \end{pmatrix} = \boldsymbol{u}^1$$

nach $\boldsymbol{v}^2$, das Ergebnis ist

$$\boldsymbol{v}^2 = \begin{pmatrix} -\frac{5117}{585} \\ \frac{170}{39} \end{pmatrix},$$

die Normierung mit dem angegebenen Normierungsvektor ergibt

$$\boldsymbol{u}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{150}{301} \end{pmatrix},$$

der nächste Rayleigh-Quotienten-Shift ist demnach gegeben durch

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= \frac{(\boldsymbol{u}^2)^H \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^2}{(\boldsymbol{u}^2)^H \boldsymbol{u}^2} \\ &= \frac{1}{301^2+150^2}\begin{pmatrix} -301 & 150 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -301 \\ 150 \end{pmatrix} \\ &= \frac{112952}{113101} \approx 0.99868 \end{aligned}$$

und stellt eine hinreichend gute Approximation an den Eigenwert Eins dar. Der nächste skalierte genäherte Eigenvektor ist nach dem altbekannten Rezept durch

$$\boldsymbol{u}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{119117703}{238235555} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ -0.4999996873 \end{pmatrix}$$

gegeben, der nächste Rayleigh-Quotient ergibt die noch bessere Näherung

$$\kappa_3 = \frac{35472594542819344}{35472603417077117} \approx 0.9999997498$$

des Eigenwertes Eins.

Aufgabe 12: (5+6+6 Punkte)
Berechnen Sie die Pseudoinversen der folgenden drei Matrizen:

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{M}_{n,m} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}.$$

Bei der letzten Matrix sind die Elemente der ersten Zeile gleich Eins, alle anderen Elemente gleich Null, und es soll die Pseudoinverse für alle $n, m \in \mathbb{N}$ angegeben werden. Wenn Ihnen diese allgemeine Fragestellung Probleme bereitet, so setzen Sie $n = 4$ und $m = 2$. Dann erhalten Sie bei der richtigen Antwort nur 4 von den möglichen 6 Punkten.

Lösung zu Aufgabe 12: Es handelt sich bei allen drei Aufgabenteilen um eine Matrix der letzten Matrizenklasse, da

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{M}_{3,1} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{N} = \boldsymbol{M}_{3,2}.$$

Daher reicht es aus, nur den letzten Teil (diesen dann aber in voller Allgemeinheit) zu beantworten. Die Matrix $\boldsymbol{M}_{n,m}$ hat den Rang Eins und die ökonomische Variante der Singulärwertzerlegung (SVD) ist, mit dem ersten Standardeinheitsvektor $\boldsymbol{e}_1 \in \mathbb{R}^n$ und dem Vektor $\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^m$ aus lauter Einsen, gegeben durch

$$\boldsymbol{M}_{n,m} = (\boldsymbol{e}_1)(\sqrt{m})(\frac{1}{\sqrt{m}}\boldsymbol{e}^T),$$

also ist die Pseudoinverse gegeben durch

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_{n,m}^{\dagger} &= (\frac{1}{\sqrt{m}}\boldsymbol{e})(\frac{1}{\sqrt{m}})(\boldsymbol{e}_1)^T = \frac{1}{m}\boldsymbol{M}_{n,m}^T \\ &= \begin{pmatrix} 1/m & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/m & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}. \end{aligned} \qquad \text{(5+6+6 Punkte)}$$