Technische Universität Hamburg-Harburg **WS 2006/2007**
Institut für Numerische Simulation
Dr. Jens-Peter M. Zemke

Klausur zur Vordiplom-Prüfung

Numerische Verfahren

16. März 2007

Sie haben **90** Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer in DRUCKSCHRIFT.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **Druckschrift** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:														
Vorname:														
Matr.-Nr.														

Ich bin darüber belehrt worden, dass meine Ausarbeitung nur dann als Prüfungsleistung bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Lösen Sie die folgenden 12 Aufgaben!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Punkte												

Σ	

Aufgabe 1: (4+4 Punkte)
Was versteht man unter dem Begriff Auslöschung? Geben Sie als Beispiel ein Verfahren oder eine Verfahrensklasse an, von dem bekannt ist, daß Auslöschung eine Rolle spielt.

Lösung zu Aufgabe 1: Man spricht von Auslöschung, wenn bei der Addition die (durch Messfehler oder durch vorherige Rundungen fehlerbehafteten) Summanden $x \cdot (1 + \varepsilon_x)$ und $y \cdot (1 + \varepsilon_y)$ entgegengesetztes Vorzeichen, den gleichen Exponenten und gleiche führende Ziffern der Mantisse haben. In diesem Falle ist $x + y$ klein gegen x und y und der relative Fehler wird verstärkt,

$$\frac{x \cdot (1 + \varepsilon_x) + y \cdot (1 + \varepsilon_y) - (x + y)}{x + y} = \frac{x}{x + y}\varepsilon_x + \frac{y}{x + y}\varepsilon_y.$$

Analog gilt dieses für die Subtraktion zweier Summanden mit gleichem Vorzeichen. (4 Punkte)

Auslöschungen treten also auf, wenn annähernd gleich große fehlerbehaftete Zahlen subtrahiert werden. Ein Beispiel sind die Newton-Cotes-Formeln höherer Ordnung, da dort die Gewichte wechselndes Vorzeichen haben und bei glatten Funktionen somit schlechte Ergebnisse liefern können. Ein anderes Beispiel ist die numerische Differentiation, wenn die dort verwendete Schrittweite h zu klein gewählt wird, oder die LR-Zerlegung bei schlecht konditionierten Gleichungssystemen, da im Falle schlechter Kondition einige der durch die Zeilen von A implizit definierten Hyperebenen kleine Winkel zueinander haben. (4 Punkte)

Aufgabe 2: (5+5 Punkte)
Geben Sie die Newtonsche Form der Polynominterpolation wieder. Geben Sie eine Newton-Form des Interpolationspolynomes der Funktion

$$f(x) = 1 + (x - 4) + (x - 4)(x - 3) + (x - 4)(x - 3)(x - 2)$$

in den Punkten x_i, $i = 0, \ldots, 3$ wieder. Die zu verwendenden Punkte x_i sind dabei gegeben in Form einer Menge als $\{x_i\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Lösung zu Aufgabe 2: Die allgemeine Form der Interpolation nach Newton liefert zu $n + 1$ vorgegebenen paarweise verschiedenen Stützstellen $\{x_i\}_{i=0}^n$ und zugehörigen Funktionswerten $\{y_i\}_{i=0}^n$ das eindeutige Interpolationspolynom p vom Höchstgrad n in der Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} [x_0, \ldots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j).$$

Dabei werden die Koeffizienten $[x_0, \ldots, x_k]$, die sogenannten dividierten Differenzen, rekursiv nach dem folgenden Schema berechnet,

$$[x_j] = y_j, \qquad j = 0, 1, \ldots, n,$$
$$[x_j, \ldots, x_k] = \frac{[x_{j+1}, \ldots, x_k] - [x_j, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_j}, \quad 0 \leqslant j < k \leqslant n. \qquad \text{(5 Punkte)}$$

Es bietet sich bei der Gestalt

$$f(x) = 1 + (x-4) + (x-4)(x-3) + (x-4)(x-3)(x-2)$$

des zu interpolierenden Polynomes an, die Punkte absteigend nach Größe zu numerieren, also

i	0	1	2	3
x_i	4	3	2	1

Das hypothetische Interpolationspolynom hat dann die Gestalt

$$p(x) = [x_0] + [x_0, x_1](x-4) + [x_0, x_1, x_2](x-4)(x-3) + [x_0, x_1, x_2, x_3](x-4)(x-3)(x-2).$$

Durch Vergleich mit der zu interpolierenden Funktion f sieht man sofort, dass

$$[x_0] = [x_0, x_1] = [x_0, x_1, x_2] = [x_0, x_1, x_2, x_3] = 1$$

und dass $p = f$. (5 Punkte)

Alternativ kann man die Knoten in jeder anderen beliebigen Reihenfolge wählen, die Funktionswerte ausrechnen, das Tableau der dividierten Differenzen aufstellen und dann die Interpolationspolynom in Newton-Form ablesen.

Aufgabe 3: (4+6 Punkte)
Berechnen Sie das Interpolationspolynom der Funktion $\sin(x)$ zu den Knoten

i	0	1	2
x_i	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$

Wie groß ist der Interpolationsfehler im Punkt

$$\tilde{x} = \frac{\pi}{4}?$$

Lösung zu Aufgabe 3: Die Datenpaare $\{x_i\}_{i=0}^2$ und $\{y_i\}_{i=0}^2$ sind gegeben durch

i	0	1	2
x_i	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
y_i	-1	0	1

Das eindeutige Interpolationspolynom g vom Höchstgrad 2 ist also die Gerade

$$g(x) = \frac{2}{\pi}\,x. \qquad \text{(4 Punkte)}$$

Der Interpolationsfehler im Punkt $\tilde{x} = \pi/4$ ist gegeben durch

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{\pi}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \approx 0.20711. \qquad \text{(6 Punkte)}$$

Aufgabe 4: (5+4 Punkte)
Berechnen Sie in dreistelliger Arithmetik ohne Verwendung von Pivotsuche die LR-Zerlegung der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wie sieht die Fehlermatrix $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{LR}$ aus, wenn $\boldsymbol{L}$ und $\boldsymbol{R}$ die in dreistelliger Arithmetik berechneten Matrizen der LR-Zerlegung bezeichnen?

Lösung zu Aufgabe 4: Diese Aufgabe ist unreflektiert dem Skript entnommen. Dort steht die Herleitung der Faktoren der LR-Zerlegung in dreistelliger Arithmetik:

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathrm{fl}(1/10^{-4}) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^4 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 0 & \mathrm{fl}(1-10^4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 0 & -10^4 \end{pmatrix}, \qquad \text{(5 Punkte)}$$

und damit

$$\boldsymbol{LR} = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher ist die Fehlermatrix gegeben als

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{LR} = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \text{(4 Punkte)}$$

Dieses zeigt, dass der relative Fehler bei LR-Zerlegung ohne Pivotisierung sehr groß werden kann, in diesem Beispiel ist er in der Spektralnorm gemessen gegeben durch

$$\frac{\|\boldsymbol{F}\|_2}{\|\boldsymbol{A}\|_2} = \left(\frac{10001 + \sqrt{499980001}}{20000}\right)^{-1} \approx 0.6180234313.$$

Aufgabe 5: (4+5 Punkte)
Wie werden die Newton-Cotes Formeln der Quadratur konstruiert? Leiten Sie für das Intervall $[0, 1]$ die erste offene Newton-Cotes-Formel her.

Lösung zu Aufgabe 5: Newton-Cotes Formeln basieren auf der Idee, die Funktion unter dem Integral in äquidistanten Punkten zu interpolieren und dann das Integral des Interpolationspolynomes als Näherung (Quadraturformel) des Integrales über die Ausgangsfunktion zu verwenden. Allgemein für das Referenzintervall $[0, 1]$ gilt also mit $n + 1$ (äquidistanten) Punkten $\{x_j\}_{j=0}^n$:

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \int_0^1 \sum_{j=0}^n f(x_j)\ell_j(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j)\alpha_j,$$

wobei die Gewichte α_j definiert werden durch

$$\alpha_j := \int_0^1 \ell_j(x),$$

und $\ell_j(x)$ das $j$te Lagrange-Basis-Polynom bezeichnet,

$$\ell_j(x) = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^n (x - x_i) \Bigg/ \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^n (x_j - x_i)\ , \quad j = 0, \dots, n. \qquad \text{(4 Punkte)}$$

Man unterscheidet, je nachdem, ob die Endpunkte $0, 1$ enthalten sind oder nicht, zwischen abgeschlossenen und offenen Newton-Cotes Formeln.

Die erste offene Newton-Cotes Formel erhält man für einen mittig platzierten Knoten $x_0 = 1/2$, also gilt

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx f\left(\frac{1}{2}\right)\alpha_0,$$

und α_0 läßt sich aus

$$\alpha_0 = \int_0^1 \ell_0(x)\,dx = \int_0^1 1\,dx = [x]_0^1 = 1 - 0 = 1$$

leicht "berechnen". Also ist die erste offene Newton-Cotes Formel die Mittelpunkt- oder auch Rechteckregel

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx f\left(\frac{1}{2}\right). \qquad \text{(5 Punkte)}$$

Aufgabe 6: (8 Punkte)
Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem

$$\|\boldsymbol{Bx} - \boldsymbol{b}\|_2 = \min$$

mit

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung zu Aufgabe 6: Das Ausgleichsproblem läßt sich genau dann eindeutig lösen, wenn die Matrix $\boldsymbol{B}$ vollen Rang hat. Da die Spalten von $\boldsymbol{B}$ eindeutig linear unabhängig sind, ist dieses hier der Fall.

Ein Lösungsweg arbeitet mit genauem Hinsehen. Da der Vektor $\boldsymbol{b}$ das Zweifache der zweiten Spalte von $\boldsymbol{B}$ ist, ist der Vektor

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

die gesuchte Lösung, da so das Residuum gleich Null wird. (8 Punkte)

Wenn man diese Lösung nicht sieht, so muß man z.B. die Pseudoinverse von $\boldsymbol{B}$ bestimmen, was aufgrund des vollen Spaltenranges gemäß

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}^\dagger = (\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^T &= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

erfolgen kann. Die Lösung $\boldsymbol{x}$ berechnet sich dann gemäß

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}^\dagger \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7: (5+7 Punkte)
Was ist eine Cholesky-Zerlegung? Hat die Matrix

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Cholesky-Zerlegung?

Lösung zu Aufgabe 7: Das Skript ist etwas ungenau bei der Definition der Cholesky-Zerlegung. Dort wird eine Zerlegung für symmetrisch positiv definite Matrizen $\boldsymbol{A}$ aus der LDL^T-Zerlegung hergeleitet, welche die Form

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T \tag{1}$$

hat, wobei $\boldsymbol{C}$ eine untere Dreiecksmatrix ist. Laut Herleitung sind die Diagonalelemente dabei positiv. Meist wird unter einer Cholesky-Zerlegung eine Zerlegung einer symmetrisch positiven Matrix A in Faktoren gemäß (1) mit einer unteren Dreiecksmatrix $\boldsymbol{C}$ mit positiven Diagonalelementen verstanden. (5 Punkte)

Da die Ausgangsmatrix $\boldsymbol{D}$ zweimal dieselbe Spalte (und Zeile) enthält, ist sie singulär, also nicht symmetrisch positiv definit und hat demnach keine Cholesky-Zerlegung. (7 Punkte)

Alternativ könnte man unter einer Cholesky-Zerlegung aber auch eine Zerlegung der Form (1) verstehen, wobei $\boldsymbol{C}$ eine untere Dreiecksmatrix mit *nichtnegativen* Diagonalelementen ist. Nach dieser Definition hätte die Matrix $\boldsymbol{D}$ eine Cholesky-Zerlegung:

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T.$$

Meist (auch unter MATLAB™) wird unter der Cholesky-Zerlegung aber der Fall einer Dreiecksmatrix mit positiver Diagonale verstanden.

Aufgabe 8: (4+4 Punkte)
Ist die Matrix

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

symmetrisch positiv definit? Ist sie symmetrisch positiv semidefinit?

Lösung zu Aufgabe 8: Die Matrix $\boldsymbol{G}$ ist sicherlich symmetrisch. Demnach ist die Fragestellung sinnvoll. Um zu testen, ob die Matrix $\boldsymbol{G}$ symmetrisch positiv definit (symmetrisch positiv semidefinit) ist, muss entschieden werden, ob die sogenannte "quadratische Form"

$$q(x, y, z) := \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + y^2 + z^2 + 2xz$$

positiv (nicht negativ) ist, also ob mit der Vektornotation

$$\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$$

das innere Produkt

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{G} \boldsymbol{x} > 0 \, (\geqslant 0) \; \forall \; \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$$

ist. Da in der quadratischen Form y nur als Quadrat auftaucht, wird der Ausdruck $q(x, y, z)$ minimiert, wenn $y = 0$. Die "reduzierte quadratische Form" $q(x, 0, z)$ ist sicherlich nicht negativ, da

$$q(x, 0, z) = x^2 + 2xz + z^2 = (x + z)^2 \geqslant 0$$

gilt, aber für $x = -z \neq 0$ wird sie zu Null minimiert. Damit ist sie nicht positiv. Damit ist $\boldsymbol{G}$ positiv semidefinit (4 Punkte), aber nicht positiv definit (4 Punkte).

Alternativ zur Verwendung einer quadratischen Form kann man sehen, dass der Vektor

$$\boldsymbol{v}^1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$ der Matrix $\boldsymbol{G}$ ist, also $\boldsymbol{G}$ sicherlich nicht symmetrisch positiv definit sein kann. Die anderen Eigenwerte berechnen sich schnell zu $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 2$ mit zugehörigen Eigenvektoren

$$\boldsymbol{v}^2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}^3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

so dass $\boldsymbol{G}$ immerhin noch symmetrisch positiv semidefinit ist. Statt der Berechnung der anderen Eigenwerte kann man aber auch Gerschgorin-Kreise verwenden. Die Menge aller Eigenwerte ist nach Gerschgorin in der Vereinigung der Kreise

$$\begin{aligned} K_1 &:= \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - 1| \leqslant 1\}, \\ K_2 &:= \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - 1| \leqslant 0\}, \\ K_3 &:= \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - 1| \leqslant 1\}, \end{aligned}$$

also im Kreis

$$K := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - 1| \leqslant 1\}$$

enthalten. Durch die Symmetrie der Matrix $\boldsymbol{G}$ sind alle Eigenwerte reell, also im Intervall

$$I = \{x \in \mathbb{R} \,:\, |x - 1| \leqslant 1\} = [0, 2]$$

enthalten und somit nicht negativ.

Aus der alleinigen Verwendung der Gerschgorin-Kreise und der Symmetrie der Matrix $\boldsymbol{G}$ folgt bereits, dass $\boldsymbol{G}$ symmetrisch positiv semidefinit ist. Um zu testen, ob $\boldsymbol{G}$ sogar symmetrisch positiv definit ist, muss nur herausgefunden werden, ob $\boldsymbol{G}$ vollen Rang hat, also regulär ist. Dass $\boldsymbol{G}$ nicht regulär ist, also dass $\boldsymbol{G}$ nicht symmetrisch positiv definit ist, folgt aus der Gleichheit der ersten und dritten Spalte (respektive, Zeile).

Aufgabe 9: (4+4+4 Punkte)
Geben Sie die Potenzmethode wieder. Konvergieren die Iterierten $\boldsymbol{u}^i$ aus der Potenzmethode für die Matrix

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

und den Startvektor

$$\boldsymbol{u}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegen einen Eigenvektor? Wenn ja, wie schnell? Wenn nein, warum nicht?

Lösung zu Aufgabe 9: Wir geben eine Variante der Potenzmethode mit Skalierung gegen einen festen Vektor $\boldsymbol{\ell}$ wieder:

```
for m=0,1,... until convergence do
  v_{m+1}=Au_m;
  k_{m+1}=l'*v_{m+1};
  u_{m+1}=v_{m+1}/k_{m+1};
end
```

(4 Punkte)

Mit der obigen Variante der Potenzmethode und der Wahl

$$\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{u}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

folgt

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}^1 &= \boldsymbol{H}\boldsymbol{u}^0 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
k_1 &= \boldsymbol{\ell}^H \boldsymbol{v}^1 = 1, \\
\boldsymbol{u}^1 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{v}^2 &= \boldsymbol{H}\boldsymbol{u}^1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix}, \\
k_2 &= \boldsymbol{\ell}^H \boldsymbol{v}^2 = 9, \\
\boldsymbol{u}^3 &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{u}^0.
\end{aligned}$$

Also verhalten sich die Vektoren $\boldsymbol{u}^i$ zyklisch, genauer gilt für $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 0$,

$$\boldsymbol{u}^{2k} = \boldsymbol{u}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}^{2k+1} = \boldsymbol{u}^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da keiner der beiden Vektoren ein Eigenvektor ist, konvergiert die Potenzmethode in diesem Fall nicht gegen einen Eigenvektor. (4 Punkte)

Wie man schnell ausrechnet, hat die Matrix $\boldsymbol{H}$ die Eigenwerte $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = 3$ mit zugehörigen Eigenvektoren

$$\boldsymbol{h}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{h}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Potenzmethode konvergiert nicht für mehrere Betragsgleiche,

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 3,$$

Betragsmaximale,

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \max_i |\lambda_i| = 3,$$

aber doch verschiedene,

$$\lambda_1 = -3 \neq 3 = \lambda_2,$$

Eigenwerte, an deren Eigenvektor der Startvektor Anteile hat,

$$\begin{aligned} \left(\boldsymbol{h}^1\right)^H \boldsymbol{u}^0 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0, \\ \left(\boldsymbol{h}^1\right)^H \boldsymbol{u}^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0. \end{aligned} \qquad \text{(4 Punkte)}$$

Die Iterierten sind nach der geschickten Wahl der Skalierung gegeben durch ein skalares Vielfaches der Differenz und der Summe der Eigenvektoren,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}^{2k} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}(\boldsymbol{h}^2 - \boldsymbol{h}^1), \\ \boldsymbol{u}^{2k+1} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{h}^2 + \boldsymbol{h}^1. \end{aligned}$$

Aufgabe 10: (6 Punkte)
Geben Sie den QR-Algorithmus in der Grundform wieder.

Lösung zu Aufgabe 10: Der QR-Algorithmus in der Grundform lautet bei gegebener Matrix $\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{(n,n)}$

Wiederhole bis zur Konvergenz für $i \in \mathbb{N}_0$
  Berechne die QR-Zerlegung von $\boldsymbol{A}_i$: $\boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{Q}_i \boldsymbol{R}_i$,
  Berechne die neue Matrix $\boldsymbol{A}_{i+1}$: $\boldsymbol{A}_{i+1} = \boldsymbol{R}_i \boldsymbol{Q}_i$. (6 Punkte)

Aufgabe 11: (6 Punkte)
Geben Sie den QR-Algorithmus mit Shifts wieder.

Lösung zu Aufgabe 11: Der QR-Algorithmus mit Shifts lautet bei gegebener Matrix $\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{(n,n)}$

Wiederhole bis zur Konvergenz für $i \in \mathbb{N}_0$
  Setze den Shift κ_i: $\kappa_i = \boldsymbol{e}_n^T \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{e}_n = a_{nn}^{(i)}$,
  Berechne die QR-Zerlegung von $\boldsymbol{A}_i - \kappa_i I$: $\boldsymbol{A}_i - \kappa_i I = \boldsymbol{Q}_i \boldsymbol{R}_i$,
  Berechne die neue Matrix $\boldsymbol{A}_{i+1}$: $\boldsymbol{A}_{i+1} = \boldsymbol{R}_i \boldsymbol{Q}_i + \kappa_i I$. (6 Punkte)

Aufgabe 12: (5+6 Punkte)
Sie haben von einer unbekannten Funktion $q(x)$ die Daten

i	0	1	2	3
x_i	1	2	3	5
y_i	9.0	4.1	0.9	1.1

mit $y_i \approx q(x_i)$ gemessen. Geben Sie einen Näherungswert für $q(\tilde{x})$ an, wobei $\tilde{x} = 4$. Begründen Sie Ihre Wahl.

Lösung zu Aufgabe 12: Eine naheliegende Wahl mit Hinblick auf eine schnelle und einfache Begründung ist $q(4) = 0$. (5 Punkte)

Als Begründung könnte man, etwa nach Anfertigung einer Skizze und/oder scharfem Hinsehen, vermuten, dass die exakte Funktion gegeben ist durch $\hat{q}(x) = (x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$, also ein quadratisches Polynom ist, und die Messwerte nur auf eine absolute Genauigkeit von ± 0.1 gemessen wurden. Ein Vorteil bei dieser Wahl ist ein maximaler relativer Fehler von Eins. (6 Punkte)

Da wir nichts über die Messgenauigkeit wissen, wäre auch eine Polynominterpolation in Frage gekommen. Die Interpolation entspricht dabei der Situation, dass keine Messfehler aufgetreten sind. Nach Lagrange z.B. hätte man also als

Polynom vom Höchstgrad 3 das Interpolationspolynom

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \sum_{j=0}^{3} y_j \ell_j(x) \\
&= \quad 9.0 \frac{(x \ \ - x_1)(x \ \ - x_2)(x \ \ - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} \\
&\quad + 4.1 \frac{(x \ \ - x_0)(x \ \ - x_2)(x \ \ - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \\
&\quad + 0.9 \frac{(x \ \ - x_0)(x \ \ - x_1)(x \ \ - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \\
&\quad + 1.1 \frac{(x \ \ - x_0)(x \ \ - x_1)(x \ \ - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \\
&= \frac{1}{16} x^3 + \frac{19}{40} x^2 - \frac{541}{80} x + \frac{609}{40},
\end{aligned}
$$

der Wert von p an der Stelle 4 wäre gegeben als

$$
p(4) = -\frac{9}{40} = -\frac{225}{1000} = -0.225.
$$

Diesen Wert kann man natürlich mit dem Algorithmus von Neville und Aitken oder nach Newton schneller ausrechnen als mit Lagrange.

Einen Mittelweg zwischen der Annahme, dass die Fehler gross ($\approx \pm 0.1$) oder gleich Null (Interpolation) sind, schlägt man ein, wenn man nach Anfertigung der Skizze ein quadratisches Polynom vermutet und dann die unbekannten Größen a, b, c aus

$$
\tilde{q}(x) = ax^2 + bx + c
$$

optimal im Sinne der kleinsten Quadrate bestimmt. Diese Optimalität führt auf das Ausgleichsproblem

$$
\|\boldsymbol{V}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2 = \min
$$

mit der Vandermondematrix

$$
\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0^1 & x_0^0 \\ x_1^2 & x_1^1 & x_1^0 \\ x_2^2 & x_2^1 & x_2^0 \\ x_3^2 & x_3^1 & x_3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \end{pmatrix}
$$

und

$$
\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 90 \\ 41 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}.
$$

Dieses Ausgleichsproblem führt nach längerem Rechenweg auf die Lösung

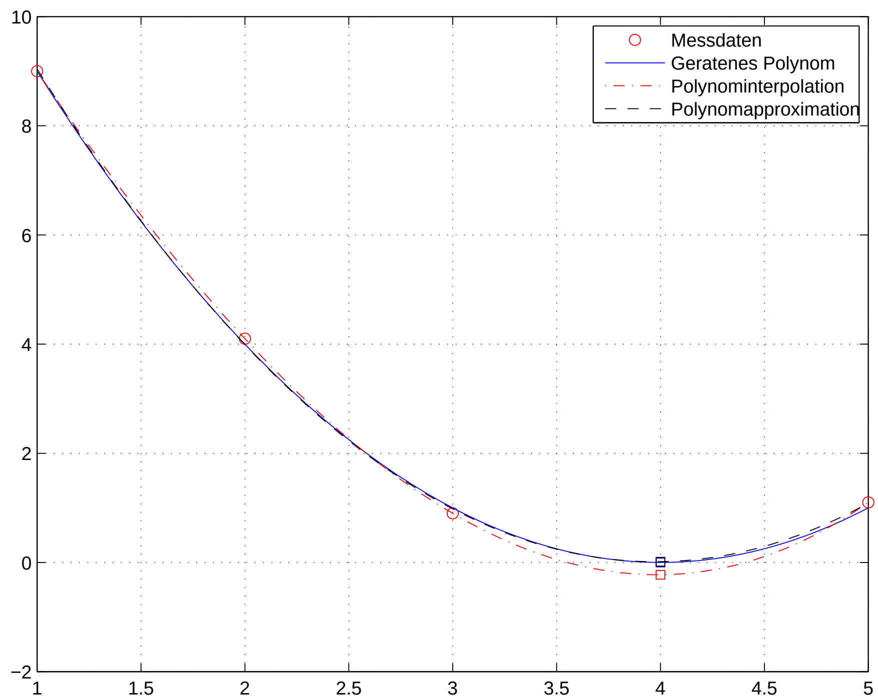
$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{440} \begin{pmatrix} 449 \\ -3569 \\ 7098 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.0205 \\ -8.1114 \\ 16.1318 \end{pmatrix}.$$

Der Wert an der Stelle 4 ist gegeben durch

$$\tilde{q}(4) = \frac{1}{440}\left(449 \cdot 4^2 - 3569 \cdot 4 + 7098\right) = \frac{3}{220} \approx 0.01363636364,$$

passt also zu dem zuerst auf sehr einfache Weise postulierten Wert 0.

Alle drei Ansätze sind zusammen mit den Messwerten in der folgenden Graphik nochmals veranschaulicht.



Wie man gut erkennen kann, ist der Abstand zwischen dem simpel "geratenen" Polynom $\hat{q}$ und dem teurer bestimmten Ausgleichspolynom $\tilde{q}$ sehr klein, genauer, gegeben durch

$$\tilde{q}(x) - \hat{q}(x) = \frac{1}{440}\left(9x^2 - 49x + 58\right) \approx 0.02045x^2 - 0.11136x + 0.13182.$$

Wenn es sich nicht um eine Klausuraufgabe gehandelt hätte, wäre die erste Frage die nach der Größe der Messfehler gewesen und die zweite die nach dem Ursprung der Messwerte, um eventuelle Charakteristika in die Modellierung einbringen zu können. Die Daten hätten ja ohne weiteres aus einem leicht gestörten Schwingungsvorgang stammen können, also sich besser durch Sinus und Kosinus, also *periodische* Funktionen beschreiben lassen.