Technische Universität Hamburg-Harburg **SS 2006**
Institut für Numerische Simulation
Dr. Jens-Peter M. Zemke

Klausur zur Vordiplom-Prüfung

Numerische Verfahren

21. Juni 2006

Sie haben **90** Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer in DRUCKSCHRIFT!!

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **Druckschrift** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:														
Vorname:														
Matr.-Nr.														

Ich bin darüber belehrt worden, daß meine Ausarbeitung nur dann als Prüfungsleistung bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Lösen Sie die folgenden 12 Aufgaben!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Punkte												

Σ	

Aufgabe 1: (3+3+4 Punkte)
Was ist eine Quadraturformel? Geben Sie die Rechteckregel wieder und approximieren Sie mit dieser das Integral

$$I = \int_{-1}^{1} \cos(x)\, dx.$$

Lösung zu Aufgabe 1: Eine Quadraturformel ist eine Approximation eines Integrales, die nur auf Funktionsauswertungen an gewissen endlich vielen Stützstellen x_i basiert. Die Funktionswerte werden mit sogenannten Gewichten w_i gewichtet und aufsummiert,

$$I(f) := \int_{0}^{1} f(x)\, dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) =: Q(f). \qquad \text{(3 Punkte)}$$

Die Rechteckregel erhält man für $n = 0$, $x_0 = 1/2$ und $w_0 = 1$,

$$R(f) = f(1/2).$$

Nach der Transformation auf das Intervall $[-1, 1]$ ist die Rechteckregel gegeben als

$$R_{[-1,1]}(f) = (1 - (-1)) \cdot f(0) = 2 \cdot f(0). \qquad \text{(3 Punkte)}$$

Der approximative Wert von I ist demnach 2,

$$I \approx R_{[-1,1]}(\cos) = 2 \cdot \cos(0) = 2 \cdot 1 = 2. \qquad \text{(4 Punkte)}$$

Der wirkliche Wert ist gegeben als

$$\int_{-1}^{1} \cos(x)\, dx = [\sin(x)]_{-1}^{+1} = 2 \cdot \sin(1) \approx 1.6829.$$

Aufgabe 2: (3+3+4 Punkte)
Was ist und wozu dient die Potenzmethode? Was geschieht, wenn Sie die Potenzmethode auf die Matrix A gegeben als

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

mit den Startvektoren

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

anwenden?

Lösung zu Aufgabe 2: Die Potenzmethode dient zur Berechnung eines dominanten Eigenwertes und des zugehörigen Eigenvektors (3 Punkte). Sie lautet in einer einfachen, dem Computer bereits gut angepassten Form wie folgt:

$$
\begin{array}{l}
\texttt{input: } \boldsymbol{A}, \boldsymbol{v} \\
\texttt{for } i = 0, 1, \ldots \\
\qquad \begin{array}{lcl} \boldsymbol{u}^i & \leftarrow & \boldsymbol{v}/\|\boldsymbol{v}\|_2 \\ \boldsymbol{v} & \leftarrow & \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^i \\ \lambda_i & \leftarrow & (\boldsymbol{u}^i)^H \boldsymbol{v} \end{array} \\
\texttt{end}
\end{array}
\qquad \text{(3 Punkte)}
$$

Wenn man die Potenzmethode auf $\boldsymbol{A}$ mit den beiden gegebenen Startvektoren anwendet, so erhält man die Iterierten

$$\boldsymbol{u}_1^0 = \boldsymbol{u}_1, \qquad \boldsymbol{u}_1^k = \boldsymbol{u}_1^1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \boldsymbol{u}_1$$

und

$$\boldsymbol{u}_2^0 = \boldsymbol{u}_2, \qquad \boldsymbol{u}_2^1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{u}_1.$$

Damit ist der Vektor $\boldsymbol{u}_1$ ein Eigenvektor von $\boldsymbol{A}$ zum Eigenwert Null (2 Punkte) und der Vektor $-\boldsymbol{u}_2$ ein zugeordneter Hauptvektor zum einzigen Eigenwert Null (2 Punkte). Die Matrix $\boldsymbol{A}$ läßt sich somit auf Jordansche Normalform $\boldsymbol{J}$ bringen:

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & -\boldsymbol{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{U}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{J}.$$

Aufgabe 3: (3+3+2 Punkte)
Was versteht man unter Polynominterpolation? Interpolieren Sie die Funktion $f(x) = x^{-1}$ in den Punkten 1, 2 und 3. Berechnen Sie den Wert des erhaltenen Interpolationspolynomes an der Stelle $x = 4$.

Lösung zu Aufgabe 3: Unter Polynominterpolation versteht man das Auffinden eines eindeutigen Polynomes p vom Höchstgrad n zu $n+1$ vorgegebenen paarweise verschiedenen Stützstellen $\{x_i\}_{i=0}^n$ und zugeordneten Funktionswerten $\{y_i\}_{i=0}^n$, so dass

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \qquad \text{(3 Punkte)}$$

Aus der Aufgabenstellung entnimmt man die Stützstellen und zugeodneten Funktionswerte

$$\begin{array}{c|ccc} x_i & 1 & 2 & 3 \\ \hline y_i & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{array}.$$

Damit ist $n = 2$, also ist ein Polynom vom Höchstgrad 2 gesucht. Diese Aufgabe bewältigt man am besten mittels der Polynominterpolation nach Newton. Die Tabelle der dividierten Differenzen zu dieser Aufgabe hat die Gestalt

$$\begin{array}{llll}
x_0 = \frac{1}{1} & y_0 = [x_0] = \frac{1}{1} & & \\
 & & [x_0, x_1] = \frac{[x_1] - [x_0]}{x_1 - x_0} = -\frac{1}{2} & \\
x_1 = \frac{2}{1} & y_1 = [x_1] = \frac{1}{2} & & [x_0, x_1, x_2] = \frac{[x_1, x_2] - [x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{1}{6}. \\
 & & [x_1, x_2] = \frac{[x_2] - [x_1]}{x_2 - x_1} = -\frac{1}{6} & \\
x_2 = \frac{3}{1} & y_2 = [x_2] = \frac{1}{3} & &
\end{array}$$

Damit lautet das Interpolationspolynom

$$\begin{aligned}
p(x) &= [x_0] + [x_0, x_1](x - x_0) + [x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
&= 1 - \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{6}(x - 1)(x - 2). \qquad \text{(3 Punkte)}
\end{aligned}$$

Der Funktionswert von p an der Stelle $x = 4$ ist gegeben durch

$$p(4) = 1 - \frac{1}{2}(4 - 1) + \frac{1}{6}(4 - 1)(4 - 2) = 1 - \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{2}. \qquad \text{(2 Punkte)}$$

Aufgabe 4: (3+3+3+3 Punkte)
Schätzen Sie möglichst genau und auf einfache Weise die Lage der Eigenwerte der folgenden Matrizen:

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon & 0 \\ \epsilon^2 & 1 & 2\epsilon \\ 3\epsilon & -\epsilon & 1 \end{pmatrix} \quad \text{wobei } \epsilon = 10^{-2},$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} i & -i \\ i & i \end{pmatrix}.$$

Lösung zu Aufgabe 4: Die Matrix $\boldsymbol{B}$ ist orthogonal und damit sind alle Eigenwerte auf dem Einheitskreis (3 Punkte). Man sieht aber auch sofort, dass ein Eigenwert 1 mit zugehörigem Eigenvektor $\boldsymbol{e}_2$ ist. Die beiden anderen Eigenwerte erhält man aufgrund der Ähnlichkeitstransformation mit einer Permutation $\boldsymbol{P}$ aufgebaut aus den Spalten $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_1$ und $\boldsymbol{e}_3$,

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}^T \boldsymbol{B} \boldsymbol{P} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & o_2^T \\ o_2 & \boldsymbol{B}' \end{pmatrix},$$

und Anwendung von Lemma 6.1 als Eigenwerte der kleineren Matrix

$$\boldsymbol{B}' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese sind, wie man sich leicht durch eine kurze Rechnung überzeugt, gegeben durch

$$\lambda_{2,3} = \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}.$$

Unter Verwendung des Satzes von Gerschgorin erhält man die weniger genaue Information, dass alle Eigenwerte im komplexen Kreis

$$K = \left\{ \left| z - \frac{1}{\sqrt{2}} \right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

liegen.

Die Matrix $\boldsymbol{C}$ behandelt man am besten über Gerschgorin: Alle Eigenwerte liegen in der Vereinigung der komplexen Kreise Z_i, $i = 1, 2, 3$ mit Mittelpunkt Eins, gegeben durch

$$Z_1 = \{|z - 1| \leqslant \epsilon = 10^{-2} = 0.01\}, \tag{1}$$
$$Z_2 = \{|z - 1| \leqslant 2\epsilon + \epsilon^2 = 0.0201\}, \tag{2}$$
$$Z_3 = \{|z - 1| \leqslant 4\epsilon = 0.04\} \tag{3}$$

und auch in der Vereinigung der komplexen Kreise S_i, $i = 1, 2, 3$ mit Mittelpunkt Eins, gegeben durch

$$S_1 = \{|z - 1| \leqslant 3\epsilon + \epsilon^2 = 0.0301\}, \tag{4}$$
$$S_2 = \{|z - 1| \leqslant 2\epsilon = 0.02\}, \tag{5}$$
$$S_3 = \{|z - 1| \leqslant 2\epsilon = 0.02\} \tag{6}$$

Die Vereinigung der Kreise ist selber ein Kreis, gegeben durch

$$Z = \cup_{i=1}^{3} Z_i = \{|z - 1| \leqslant 0.04\} \tag{7}$$
$$S = \cup_{i=1}^{3} S_i = \{|z - 1| \leqslant 0.0301\}. \tag{8}$$

Da alle drei Eigenwerte in beiden Kreisen enthalten sind, bildet man zweckmäßigerweise den Schnitt der beiden Kreise und erhält so als Endergebnis den kleineren der beiden Kreise,

$$G = Z \cap S = S = \{|z - 1| \leqslant 0.0301\}. \qquad \text{(3 Punkte)}$$

Die Matrix $\boldsymbol{D}$ ist symmetrisch und damit sind alle Eigenwerte reell. Es ist leicht zu sehen, dass die Matrix $\boldsymbol{D}$ Rang Eins hat, da

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^T \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gilt. Damit sind alle Vektoren, die senkrecht auf $\boldsymbol{e}$ stehen, Eigenvektoren zum Eigenwert Null (dieser Raum hat als Orthogonalraum des $\mathbb{C}^4$ zu dem einzelnen Vektor $\boldsymbol{e}$ die Dimension $3 = 4 - 1$), $\boldsymbol{e}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert 4,

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{e}) \cdot \boldsymbol{e} = 4 \cdot \boldsymbol{e}.$$

Der Satz von Gerschgorin zusammen mit der Symmetrie liefert nur die Information, dass das Intervall $[-2, 4]$ alle Eigenwerte enthält (3 Punkte).

Die Eigenwerte von $\boldsymbol{E}$ sollte jeder berechnen können, sie sind (vergleiche die zweite Vorgehensweise bei der Matrix $\boldsymbol{B}$, die Berechnung der Eigenwerte von $\boldsymbol{B}'$) gegeben durch

$$\lambda_{1,2} = i \pm 1. \qquad \text{(3 Punkte)}$$

Aufgabe 5: (4 Punkte)
Wofür stehen Δ, p und q in der Notation $S(\Delta, p, q)$ des Funktionenraumes der Splines?

Lösung zu Aufgabe 5: Splines sind stückweise polynomiale Funktionen. Die Notation schlüsselt sich auf wie folgt: Δ steht für eine Zerlegung auf der reellen Achse, also für eine endliche Anzahl von geordneten Punkten in einem Intervall $[a, b]$ der Form $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Bezeichne s den Spline. Dann sind die Funktionen $s\big|_{[x_i, x_{i+1}]}$ Polynome vom Maximalgrad p, und an den Knoten x_i ist der Spline (mindestens) q mal stetig differenzierbar.

Aufgabe 6: (3 Punkte)
Zu den Knoten x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ seien die Interpolationsdaten

$$s(x_i) = y_i, \quad s'(x_i) = z_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

gebenen. Stellen Sie die Gleichungsbilanz für den Splineraum $S(\{x_i\}_{i=0}^n, 3, 1)$ auf.

Lösung zu Aufgabe 6: Es sind $n+1$ Knoten, also n Intervalle und $n-1$ innere Knoten gegeben. Es ist pro Intervall ein Polynom

$$p_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

vom Höchstgrad 3 zu berechnen, also haben wir $4n$ Unbekannte zu bestimmen. Pro Knoten sind durch die Interpolationsbedingungen "vorgeschriebener Funktionswert" und "vorgeschriebene Ableitung" 2 Bedingungen, also insgesamt $2(n+1) = 2n+2$ Bedingungen gegeben. An jedem inneren Knoten haben wir die Stetigkeit des gesuchten Splines und der Ableitung des gesuchten Splines zu erfüllen; dadurch erhalten wir insgesamt zusätzlich $2(n-1) = 2n-2$ zu erfüllende Bedingungen.

Die Gleichungsbilanz lautet demnach also:

$$\begin{array}{rlr} & 4n & \text{(Anzahl der Unbekannten)} \\ - & (2n+2) & \text{(Interpolationsbedingungen)} \\ - & (2n-2) & \text{(Stetigkeitsforderungen)} \\ \hline & 0 & \text{(eventuelle Randbedingungen)} \end{array} \qquad \text{(3 Punkte)}$$

Insbesondere benötigt man für diese Art der Splines, die sogenannten kubischen Hermite-Splines, keine zusätzlichen Randbedingungen.

Aufgabe 7: (4+2 Punkte)
Bestimmen Sie die Pseudonormallösungen der linearen Ausgleichsprobleme

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|_2 = \min$$

und

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|_2 = \min .$$

Lösung zu Aufgabe 7: Die Pseudonormallösung eines linearen Ausgleichsproblemes $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2 = \min$ läßt sich mathematisch durch die Pseudoinverse $\boldsymbol{A}^\dagger$ von $\boldsymbol{A}$ angewandt auf die “rechte Seite” $\boldsymbol{b}$ beschreiben,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^\dagger \boldsymbol{b}.$$

Wenn die Systemmatrix A vollen Rang hat, so kann man die Charakterisierung mittels der Normalgleichungen verwenden,

$$\boldsymbol{A}^\dagger = (\boldsymbol{A}^H \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{A}^H.$$

Da sowohl die Matrix

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

als auch die “Matrix”

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vollen Spaltenrang haben, sind die Pseudonormallösungen gegeben als

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}_1^\dagger \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} &= (\boldsymbol{A}_1^H \boldsymbol{A}_1)^{-1} \boldsymbol{A}_1^H \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(4 Punkte)}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}_2^\dagger \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} &= (\boldsymbol{A}^H \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{A}^H \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{6}{3} = 2. \qquad \text{(2 Punkte)}
\end{aligned}$$

Aufgabe 8: (4 Punkte)
Zeigen Sie, daß der Rayleigh-Quotient

$$R(\boldsymbol{x}) := \frac{\boldsymbol{x}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^H \boldsymbol{x}}$$

eines Vektors $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ mit einer Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ die beste Approximation an einen Eigenwert zum approximativen Eigenvektor $\boldsymbol{x}$ ist. Genauer: Zeigen Sie, daß

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} R(\boldsymbol{x})\|_2 = \min_{\lambda \in \mathbb{C}} \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}\lambda\|_2$$

gilt.

Lösung zu Aufgabe 8: Die Gleichung

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}\lambda\|_2 = \min_{\lambda \in \mathbb{C}}$$

stellt ein lineares Ausgleichsproblem

$$\|\hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{b}}\|_2 = \min$$

dar. Die gesuchte Größe $\hat{\boldsymbol{x}}$ ist λ, die "Matrix" $\hat{\boldsymbol{A}}$ ist der Vektor $\boldsymbol{x}$ und die rechte Seite $\hat{\boldsymbol{b}}$ ist $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$. Da die "Matrix" $\boldsymbol{x}$ vollen Spaltenrang hat, sofern $\boldsymbol{x}$ nicht der Nullvektor ist, können wir die Pseudoinverse

$$\boldsymbol{x}^\dagger = \hat{\boldsymbol{A}}^\dagger = (\hat{\boldsymbol{A}}^H \hat{\boldsymbol{A}})^{-1} \hat{\boldsymbol{A}}^H = (\boldsymbol{x}^H \boldsymbol{x})^{-1} \boldsymbol{x}^H = \frac{\boldsymbol{x}^H}{\boldsymbol{x}^H \boldsymbol{x}}$$

auf die rechte Seite anwenden, um die Pseudonormallösung zu berechnen. Diese minimiert den gegebenen Ausdruck über alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und ergibt sich zu

$$\lambda = \hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{A}}^{\dagger}\hat{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{x}^{\dagger}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{x}} = R(\boldsymbol{x}). \qquad \text{(4 Punkte)}$$

Aufgabe 9: (4+4+3 Punkte)
Geben Sie die allgemeine Form der Polynominterpolation nach Newton wieder. Interpolieren Sie die Daten

$$\begin{array}{c|ccc} x_i & 1 & 2 & 3 \\ \hline y_i & 2 & 5 & 7 \end{array}.$$

Berechnen Sie den Wert des Interpolationspolynomes bei $x = 1.5$.

Lösung zu Aufgabe 9: Die allgemeine Form der Interpolation nach Newton liefert zu $n+1$ vorgegebenen paarweise verschiedenen Stützstellen $\{x_i\}_{i=0}^n$ und zugehörigen Funktionswerten $\{y_i\}_{i=0}^n$ das eindeutige Interpolationspolynom p vom Höchstgrad n in der Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n}[x_0, \ldots, x_k]\prod_{j=0}^{k-1}(x - x_j).$$

Dabei werden die Koeffizienten $[x_0, \ldots, x_k]$, die sogenannten dividierten Differenzen, rekursiv nach dem folgenden Schema berechnet,

$$\begin{aligned} [x_j] &= y_j, \qquad j = 0, 1, \ldots, n, \\ [x_j, \ldots, x_k] &= \frac{[x_{j+1}, \ldots, x_k] - [x_j, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_j}, \quad 0 \leqslant j < k \leqslant n. \end{aligned} \qquad \text{(4 Punkte)}$$

Die Tabelle der dividierten Differenzen zu dieser Aufgabe hat die Gestalt

$$\begin{array}{llll} x_0 = 1 & y_0 = [x_0] = 2 & & \\ & & [x_0, x_1] = \dfrac{[x_1] - [x_0]}{x_1 - x_0} = 3 & \\ x_1 = 2 & y_1 = [x_1] = 5 & & [x_0, x_1, x_2] = \dfrac{[x_1, x_2] - [x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = -\dfrac{1}{2}. \\ & & [x_1, x_2] = \dfrac{[x_2] - [x_1]}{x_2 - x_1} = 2 & \\ x_2 = 3 & y_2 = [x_2] = 7 & & \end{array}$$

Damit lautet das Interpolationspolynom

$$\begin{aligned} p(x) &= [x_0] + [x_0, x_1](x - x_0) + [x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &= 2 + 3(x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)(x - 2). \end{aligned} \qquad \text{(4 Punkte)}$$

Der Funktionswert von p an der Stelle $x = 1.5$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} p(1.5) &= 2 + 3(1.5 - 1) - \frac{1}{2}(1.5 - 1)(1.5 - 2) \\ &= 2 + \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{16}{8} + \frac{12}{8} + \frac{1}{8} = \frac{29}{8} = 3.625. \end{aligned} \qquad \text{(3 Punkte)}$$

Aufgabe 10: (6 Punkte)
Berechnen Sie eine Näherung der Ableitung der (unbekannten) Funktion f an der Stelle $x = 1$, wobei von f nur die Funktionswerte

x_i	1	2	3
$f(x_i)$	2	5	7

bekannt sind.

Lösung zu Aufgabe 10: “Zufälligerweise” sind die Daten dieselben wie aus der letzten Aufgabe. Damit kann man das Polynom aus der letzten Aufgabe ableiten,

$$p'(x) = 3 - \frac{1}{2}\left((x-1) + (x-2)\right) = 3 - \left(x - \frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2} - x,$$

und als Näherung für die Ableitung den Funktionswert $p'(1)$ ausrechnen:

$$f'(1) \approx p'(1) = \frac{9}{2} - 1 = \frac{7}{2} = 3.5. \qquad \text{(6 Punkte)}$$

Man kann natürlich auch ebenso einen vorwärtsgenommenen Differenzenquotienten verwenden,

$$f'(1) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{5-2}{2-1} = 3. \qquad \text{(6 Punkte)}$$

Aufgabe 11: (5 Punkte)
Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Gerschgorin, daß die folgende Matrix für jede Dimension n regulär ist:

$$T_n = \begin{pmatrix} 4 & 1 & & \\ 1 & 4 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

Lösung zu Aufgabe 11: Die Matrizen T_1 und T_2 sind regulär, da

$$\begin{aligned} T_1 &= 4, & \det(T_1) &= 4 \neq 0, \\ T_2 &= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, & \det(T_2) &= 16 - 1 = 15 \neq 0. \end{aligned}$$

Die Gerschgorin-Kreise nach Zeilen und Spalten sind für alle $n \in \mathbb{N}$ gleich, da die Matrizen symmetrisch sind. Durch die Symmetrie wissen wir überdies, dass die Eigenwerte in reellen Intervallen enthalten sind. Diese Intervalle sind gegeben durch

$$K_1 = \{|4-x| \leqslant 1\} = [3,5] = K_n, \tag{9}$$
$$K_i = \{|4-x| \leqslant 2\} = [2,6], \quad i = 2,\dots,n-1. \tag{10}$$

Die Vereinigung dieser Intervalle ist für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, das Intervall $[2,6]$, welches die Null nicht enthält. Damit kann Null kein Eigenwert der Matrizen T_n, $n \geqslant 3$, sein, also sind alle T_n notwendigerweise regulär (5 Punkte).

Aufgabe 12: (4 Punkte)
Zeigen Sie, daß das Eulersche Polygonzugverfahren

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

für die Anfangswertaufgabe

$$y' = f(x,y), \qquad y(a) = y_a$$

einen lokalen Fehler

$$\epsilon(h) = z(x_{n+1}) - z(x_n) - hf(x_n, y_n) = O(h^2)$$

hat.

Lösung zu Aufgabe 12: Die Funktion z löst die Anfangswertaufgabe

$$z' = f(x,z), \quad z(x_n) = y_n.$$

Die Entwicklung der Funktion $z \in C^2$ am Punkt x_n nach Taylor ergibt

$$\begin{aligned} z(x_{n+1}) &= z(x_n) + z'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{z''(\xi)}{2}(x_{n+1} - x_n)^2 \\ &= y_n + f(x_n, y_n) \cdot h + \frac{z''(\xi)}{2} \cdot h^2, \end{aligned}$$

wobei $\xi \in (x_n, x_{n+1})$ eine Zwischenstelle ist und

$$z'(x_n) = f(x_n, z(x_n)) = f(x_n, y_n) \quad \text{und} \quad h = x_{n+1} - x_n$$

ausgenutzt wurden. Damit ist der lokale Fehler $\epsilon(h)$ gegeben als

$$\epsilon(h) = z(x_{n+1}) - z(x_n) - hf(x_n, y_n) = \frac{z''(\xi)}{2} \cdot h^2 = O(h^2). \qquad \text{(4 Punkte)}$$