Technische Universität Hamburg-Harburg **WS 2006**
Institut für Numerische Simulation
Dr. Jens-Peter M. Zemke

Klausur zur Vordiplom-Prüfung

Numerische Verfahren

27. März 2006

Sie haben **90** Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer in DRUCKSCHRIFT!!

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **Druckschrift** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:														
Vorname:														
Matr.-Nr.														

Ich bin darüber belehrt worden, daß meine Ausarbeitung nur dann als Prüfungsleistung bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Lösen Sie die folgenden 12 Aufgaben!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Punkte												

Σ	

Aufgabe 1: (2+2+2+3 Punkte)
Was ist ein Mehrschrittverfahren und wozu dient es? Geben Sie das Adams-Bashforth Verfahren für $k = 1$ (Euler-Verfahren) wieder und zeigen Sie, daß es von der Ordnung 1 ist.

Lösung zu Aufgabe 1: Ein Mehrschrittverfahren ist ein Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung von Funktionswerten einer durch eine Anfangswertaufgabe

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

implizit gegebenen Funktion $y = y(x)$. (2 Punkte)

Ein Mehrschrittverfahren hat dabei die Gestalt

$$\sum_{\nu=0}^{k} a_\nu \, y_{n+\nu} = h \sum_{\nu=0}^{k} b_\nu \, f_{n+\nu}$$

mit $f_{n+\nu} := f(x_{n+\nu}, y_{n+\nu})$, wobei $a_k \neq 0$ vorausgesetzt wird. (2 Punkte)

Das explizite Euler-Verfahren ist durch $k = 1$, $a_0 = -1$, $a_1 = 1$, $b_0 = 1$ und $b_1 = 0$ gegeben und hat die einfache Gestalt

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(x_n, y_n). \qquad \text{(2 Punkte)}$$

Um zu zeigen, dass die Ordnung des expliziten Euler-Verfahrens gleich 1 ist, müssen wir zeigen, dass der lokale Fehler

$$\varepsilon_n = y(x_{n+1}) - y(x_n) - h_n f(x_n, y(x_n)) = O(h_n^{p+1})$$

mit $p = 1$ erfüllt. Die Taylorentwicklung der unbekannten Funktion y an der Stelle x_n mit Restglied ist gegeben durch

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{y''(\xi_n)}{2!}(x_{n+1} - x_n)^2, \qquad (1)$$

wobei $\xi \in (x_n, x_{n+1})$ und die Entwicklung sicherlich nur möglich ist, wenn $y \in C^2[a, b]$ gilt, was wir aber ohne weiteres annehmen. Nun gilt nach der Differentialgleichung der Anfangswertaufgabe $y'(x) = f(x, y)$, also $y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$ und der Abstand zwischen x_n und x_{n+1} ist gegeben durch $h_n = x_{n+1} - x_n$. Damit liest sich Gleichung (1) wie

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h_n f(x_n, y(x_n)) + \frac{y''(\xi_n)}{2!} h_n^2,$$

also verhält sich der lokale Fehler wie

$$\varepsilon_n = \frac{y''(\xi_n)}{2!} h_n^2 = O(h_n^2) = O(h_n^{1+1}).$$

Damit hat das explizite Euler-Verfahren die Ordnung 1. (3 Punkte)

Aufgabe 2: (3+4 Punkte)
Was sind Splines? Interpolieren Sie die folgenden Daten mit Splines aus dem Raum $S(\Delta, 1, 0)$:

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	1	1	1	2	3	4	4

Lösung zu Aufgabe 2: Splines sind stückweise polynomiale Funktionen, die an den gemeinsamen Punkten bis zu einer vorgegebenen Differenzierbarkeit identisch sind. Strenger formuliert sind Splines $s \in S(\Delta, p, q)$ Funktionen, die auf Teilstücken einer **Zerlegung**

$$\Delta = \{x_0, \dots, x_n\}, \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

mit einem **Polynom vom Höchstgrad** p übereinstimmen, also

$$s\Big|_{[x_{i-1}, x_i]} \in \Pi_p \quad \forall\, i = 1, \dots, n,$$

wobei der Spline q**-mal stetig differenzierbar** ist, also auch insbesondere an den inneren Stützstellen x_i,

$$\lim_{\substack{x<x_i \\ x\to x_i}} s^{(j)}(x) = \lim_{\substack{x>x_i \\ x\to x_i}} s^{(j)}(x) \quad \forall\, j = 0, 1, \dots, q, \quad \forall\, i = 1, \dots, n-1. \quad \text{(3 Punkte)}$$

Die eindeutige stückweise lineare (wegen $p = 1$) stetige (wegen $q = 0$) Interpolation der gegebenen Daten ist durch den Spline

$$s(x) = \begin{cases} 1, & 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ x-2, & 3 \leqslant x \leqslant 6, \\ 4, & 6 \leqslant x \leqslant 7. \end{cases}$$

gegeben. (4 Punkte)

Aufgabe 3: (3+3+4 Punkte)
Was ist eine Quadraturformel? Geben Sie die Trapezregel wieder und approximieren Sie mit dieser das Integral

$$I = \int_0^1 \sin(x)\, dx.$$

Lösung zu Aufgabe 3: Eine Quadraturformel ist eine Formel zur approximativen Auswertung eines Integrales und hat die Gestalt

$$Q(f) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j f(x_j)$$

mit vorgegebenen "Gewichten" α_j und Stützstellen x_j. (3 Punkte)

Die Trapezregel ist gegeben durch $n = 1$, die Stützstellen $x_0 = a$ und $x_1 = b$ und $\alpha_0 = \alpha_1 = (b-a)/2$, also

$$T(f) = (b-a)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right). \qquad \text{(3 Punkte)}$$

Die Trapezregel liefert damit als Näherung des Integrales den Wert

$$\int_0^1 \sin(x)\,dx \approx \frac{\sin(0)+\sin(1)}{2} = \frac{\sin(1)}{2}. \qquad \text{(4 Punkte)}$$

Diese Näherung und das Integral ergeben numerisch ausgewertet (dieses war nicht von Ihnen verlangt) approximativ

$$\frac{\sin(1)}{2} \approx 0.4207,$$
$$\int_0^1 \sin(x)\,dx = [\cos(x)]_0^1 = 1 - \cos(1) \approx 0.4597.$$

Aufgabe 4: (4+4 Punkte)
Was ist Polynominterpolation? Geben Sie die allgemeine Form des Lagrangeschen Interpolationspolynomes an.

Lösung zu Aufgabe 4: Polynominterpolation ist das Auffinden eines (eindeutigen) Polynomes $p \in \Pi_n$ vom Höchstgrad n zu gegebenen $n+1$ Stützstellen

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n$$

und zugeordneten Funktionswerten

$$y_0, y_1, \ldots, y_n,$$

das die Interpolationsbedingungen

$$p(x_j) = y_j \quad \forall\ j = 0, 1, \ldots, n$$

erfüllt. (4 Punkte)

Das Lagrangesche Interpolationspolyom ist durch die explizite Darstellung

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \ell_j(x), \qquad \ell_j(x) = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} (x - x_i) \Bigg/ \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} (x_j - x_i)\,, \quad j = 0, \ldots, n.$$

gegeben. (4 Punkte)

Aufgabe 5: (3+3 Punkte)
Berechnen Sie die Interpolationspolynome zu den Daten

$$\begin{array}{c|ccc} x_i & 1 & 2 & 3 \\ \hline y_i & 0 & 1 & 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c|ccccc} x_i & 1 & 2 & 3 & 4 & 42 \\ \hline y_i & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

Lösung zu Aufgabe 5: Die beiden Interpolationspolynome sind beides Lagrangebasispolynome. Das Interpolationspolynom zum ersten Datensatz ist gegeben durch

$$p_1(x) = \ell_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = -x^2 + 4x - 3, \qquad \text{(3 Punkte)}$$

das zum zweiten Datensatz durch

$$\begin{aligned} p_2(x) = \ell_1(x) &= \frac{(x-1)(x-3)(x-4)(x-42)}{(2-1)(2-3)(2-4)(2-42)} \\ &= -\frac{x^4 - 50x^3 + 355x^2 - 810x + 504}{80}. \end{aligned} \qquad \text{(3 Punkte)}$$

Aufgabe 6: (3+3+3 Punkte)
Was ist numerische Differentiation? Geben Sie eine Differenzenapproximation für die erste Ableitung einer Funktion f an und bestimmen Sie deren Fehlerordnung.

Lösung zu Aufgabe 6: Numerische Differentiation bezeichnet die Approximation der r-ten Ableitung einer Funktion mittels diskreter Funktionswerte für ein $r = 0, 1, \ldots$. (3 Punkte)

Eine Differenzenapproximation für die erste Ableitung ist der vorwärtsgenommene Differenzenquotient

$$f'(x_j) \approx \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j}. \tag{2}$$

Dabei sind $y_{j+1} = f(x_{j+1})$ und $y_j = f(x_j)$ gegebene Funktionswerte an den Stützstellen x_{j+1} und x_j. (3 Punkte)

Die Fehlerordnung einer Differenzenapproximation ist definiert als der Exponent p in $h = x_{j+1} - x_j$ im Fehler

$$D_r f(x; h) - f^{(r)}(x) = O(h^p).$$

Der angegebene vorwärtsgenommene Differenzenquotient hat die Ordnung Eins, da nach dem Satz von Taylor für $f \in C^2$ mit einem $\xi \in (x_j, x_j + h)$ gilt

$$f(x_j + h) = f(x_j) + f'(x_j)h + \frac{h^2}{2} f''(\xi),$$

d.h.

$$f'(x_j) = \frac{y_{j+1} - y_j}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi).$$

Es gilt also für den Fehler des vorwärtsgenommenen Differnzenquotienten die Asymptotik $O(h) = O(h^1)$. (3 Punkte)

Aufgabe 7: (3+4+3 Punkte)
Was ist eine LDL^T-Zerlegung? Berechnen Sie die LDL^T-Zerlegung der folgenden Matrix:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Ist diese Matrix symmetrisch positiv definit?

Lösung zu Aufgabe 7: Die LDL^T-Zerlegung bezeichnet die Zerlegung einer symmetrischen Matrix $\boldsymbol{A}$ in ein Produkt von drei Faktoren der Gestalt

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{D}\boldsymbol{L}^T,$$

wobei $\boldsymbol{L}$ eine untere Dreicksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen und $\boldsymbol{D}$ eine Diagonalmatrix ist. (3 Punkte)

Die LDL^T-Zerlegung kann man gemäß dem Skript aus der LR-Zerlegung ablesen. Die LR-Zerlegung von der gegebenen Matrix $\boldsymbol{A}$ ist gegeben als

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -17 \end{pmatrix}$$

Damit ist die LDL^T-Zerlegung gegeben als $\boldsymbol{L}$ aus der LR-Zerlegung und $\boldsymbol{D}$ als Diagonale von $\boldsymbol{R}$ aus der LR-Zerlegung,

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{D}\boldsymbol{L}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \text{(4 Punkte)}$$

Eine Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ is symmetrisch positiv definit, wenn sie symmetrisch ist und überdies

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} > 0 \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$$

gilt. Da mit dem zweiten Einheitsvektor $\boldsymbol{e}_2$,

$$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{e}_2^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{e}_2 = -5 < 0,$$

gilt, ist diese Matrix nicht positiv definit. Ein anderer Weg dieses zu sehen, basiert auf der Verwandschaft zwischen der LDL^T-Zerlegung und der Cholesky-Zerlegung. Wäre $\boldsymbol{A}$ symmetrisch positiv definit, so müssten laut der Herleitung der Cholesky-Zerlegung im Skript alle Diagonalelemente von $\boldsymbol{D}$ positiv sein. (3 Punkte)

Aufgabe 8: (4+4 Punkte)
Was ist ein lineares Ausgleichsproblem? Bestimmen Sie die Pseudonormallösung

von

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2 = \min .$$

Lösung zu Aufgabe 8: Ein lineares Ausgleichsproblem hat die Gestalt

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2 = \min, \tag{3}$$

wobei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{(n,m)}$, $n \geqslant m$, eine gegebene, im Allgemeinen rechteckige, Matrix und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ ein gegebener Vektor ist. Gesucht wird ein Vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$, welcher den obigen Ausdruck (3), ergo die euklidische Länge des Residuums $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, minimiert. (4 Punkte)

Die Pseudonormallösung eines linearen Ausgleichsproblemes ist der Vektor $\boldsymbol{x}$ minimaler Länge, welcher den Ausdruck (3) minimiert. In unserem Fall sieht man sofort, dass $\boldsymbol{x}$ der erste Einheitsvektor ist,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

da $\boldsymbol{b}$ die erste Spalte von $\boldsymbol{A}$ ist und $\boldsymbol{A}$ vollen Rang hat. Wenn man dieses nicht sieht, so kann man z.B. die Normalgleichungen (und damit implizit auch gleich die Pseudoinverse von $\boldsymbol{A}$) mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

heranziehen:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \qquad \text{(4 Punkte)}$$

Aufgabe 9: (5 Punkte)
Sie möchten ein lineares Gleichungssystem

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

mit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ lösen. Sie haben aber durch die vorangehende Modellierung eine gestörte Matrix $\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\Delta A}$ mit einem relativen Fehler in der Größenordnung

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta A}\|_2}{\|\boldsymbol{A}\|_2} \approx 10^{-12}$$

berechnet und lösen nun das gestörte Gleichungssystem

$$\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}, \qquad \tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}.$$

Die Kondition der Matrix sei gegeben durch $\kappa_2(\boldsymbol{A}) = 10^5$. Wie groß ist dann der relative Fehler in $\boldsymbol{x}$ schätzungsweise? Zur Erinnerung: Der relative Fehler in $\boldsymbol{x}$ ist definiert durch

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2}.$$

Lösung zu Aufgabe 9: Laut Satz 4.27 im Skript ist der relative Fehler in $\boldsymbol{x}$ beschränkt durch

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} \leqslant \frac{\kappa_2(\boldsymbol{A})}{1 - \kappa_2(\boldsymbol{A})\frac{\|\boldsymbol{\Delta A}\|_2}{\|\boldsymbol{A}\|_2}} \left(\frac{\|\boldsymbol{\Delta A}\|_2}{\|\boldsymbol{A}\|_2} + \frac{\|\boldsymbol{\Delta b}\|_2}{\|\boldsymbol{b}\|_2}\right),$$

also ungefähr durch die Summe der relativen Fehler in $\boldsymbol{A}$ (ist gegeben) und in $\boldsymbol{b}$ (ist nicht gestört) mal die Kondition von $\boldsymbol{A}$ (ist gegeben). Einsetzen ergibt in erster Näherung

$$\begin{aligned}
\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} &\leqslant \frac{\kappa_2(\boldsymbol{A})}{1 - \kappa_2(\boldsymbol{A})\frac{\|\boldsymbol{\Delta A}\|_2}{\|\boldsymbol{A}\|_2}} \frac{\|\boldsymbol{\Delta A}\|_2}{\|\boldsymbol{A}\|_2} \\
&\approx \frac{10^{-12}}{1 - 10^{-12}10^5} 10^5 = \frac{10^{-7}}{1 - 10^{-7}} \\
&\approx 10^{-7}. \qquad \text{(5 Punkte)}
\end{aligned}$$

Die Frage liess sich auch unter alleiniger Verwendung der Bemerkung 4.29 des Skriptes beantworten.

Aufgabe 10: (3+3+3+4 Punkte)
Geben Sie Schranken für die Eigenwerte der folgenden vier Matrizen an:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Lösung zu Aufgabe 10: Die Eigenwerte von $\boldsymbol{B}$ liegen auf dem Einheitskreis, da $\boldsymbol{B}$ eine orthogonale Matrix ist, somit gilt für jeden Eigenvektor $\boldsymbol{v}$

$$\|\boldsymbol{v}\|_2 = \|\boldsymbol{Bv}\|_2 = \|\lambda \boldsymbol{v}\|_2 = |\lambda|\|\boldsymbol{v}\|_2.$$

Die Eigenwerte von $\boldsymbol{B}$ sind reell, da $\boldsymbol{B}$ überdies symmetrisch ist. Damit sind die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Die Eigenwerte lassen sich aber auch einfach direkt zu $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ berechnen. (3 Punkte)
Die Eigenwerte von $\boldsymbol{C}$ lassen sich nicht so gut mit dem Satz von Gershgorin abschätzen, da die Kreise sich im Punkte 6 berühren. Durch die Symmetrie von $\boldsymbol{C}$ wissen wir aber zumindestens, dass die Eigenwerte somit in dem Intervall

$$\lambda_{1,2} \in [4,6] \cup [6,8] = [4,8]$$

liegen. Die wirklichen Eigenwerte sind durch

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-\sqrt{2} \\ 6+\sqrt{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4.586 \\ 7.414 \end{pmatrix}$$

gegeben. (3 Punkte)
Nach dem Satz von Gershgorin liegen alle Eigenwerte von $\boldsymbol{D}$ in den komplexen Kreisen

$$\lambda_i \in \{|z-2| \leqslant 2\}.$$

Unter Verwendung der Shiftinvarianz der Eigenvektoren sieht man, dass die Eigenwerte von $\boldsymbol{D}$ die um 2 verschobenen Eigenwerte einer schiefsymmetrischen Matrix sind,

$$\boldsymbol{D} - 2\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{D}_0.$$

Da die Eigenwerte einer schiefsymmetrischen Matrix rein imaginär sind, liegen die Eigenwerte von $\boldsymbol{D}$ in einer zur imaginären Achse um 2 verschobenen Achse, $\lambda_j = 2 + ix_j$, und nach Gershgorin für $\boldsymbol{D}_0$ folgt für x_j

$$-2 \leqslant x_j \leqslant 2. \qquad \text{(3 Punkte)}$$

Die Eigenwerte sind explizit berechenbar, da $\boldsymbol{D}$ eine tridiagonale Toeplitzmatrix ist und sind gegeben durch

$$\lambda_j = 2 - 2i\cos\left(\frac{j\pi}{5}\right), \quad j = 1, \ldots, 4.$$

Die Eigenwerte von $\boldsymbol{E}$ lassen sich schnell durch die Zeilensummennorm abschätzen, es gilt für jede Operatornorm bekanntlich mit einem Eigenvektor $\boldsymbol{v}$

$$|\lambda|\|\boldsymbol{v}\| = \|\lambda\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{E}\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\boldsymbol{E}\|\|\boldsymbol{v}\|.$$

Die Zeilensummennorm liefert so z.B.

$$|\lambda_j| \leqslant \|\boldsymbol{E}\|_\infty = \max\{|a| + |b|, |c| + |d|\}.$$

Wenn alle Einträge in $\boldsymbol{E}$ klein sind, macht diese Abschätzung Sinn. Ansonsten gilt nach Gershgorin, dass die Eigenwerte in der Vereinigung der komplexen Kreise

$$\lambda_j \in \{|z-a| \leqslant |b|\} \cup \{|z-d| \leqslant |c|\} \qquad \text{(4 Punkte)}$$

liegen. Diese Art der Abschätzung macht Sinn, wenn a und d betragsmäßig groß sind im Vergleich mit b und c. Natürlich kann man auch wieder die Eigenwerte explizit angeben,

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2}.$$

Dort lassen sich die vorher getroffenen Aussagen leicht überprüfen.

Aufgabe 11: (3+3+3 Punkte)
Was ist der QR-Algorithmus? Geben Sie den QR-Algorithmus in der Grundform wieder. Was gilt für die so erzeugten Matrizen?

Lösung zu Aufgabe 11: Der QR-Algorithmus ist ein Algorithmus zur Berechnung aller Eigenwerte einer quadratischen Matrix $\boldsymbol{A}$. (3 Punkte)
Der QR-Algorithmus in der Grundform ist gegeben durch $\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{A}$ und die Iteration

$$\boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{Q}_i \boldsymbol{R}_i, \quad \boldsymbol{A}_{i+1} = \boldsymbol{R}_i \boldsymbol{Q}_i, \quad i = 0, 1, \ldots \qquad \text{(3 Punkte)}$$

Die Matrizen $\boldsymbol{A}_i$ sind alle zueinander unitär ähnlich und haben damit die gleichen Eigenwerte,

$$\boldsymbol{A}_{i+1} = \boldsymbol{R}_i \boldsymbol{Q}_i = \boldsymbol{Q}_i^H \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{Q}_i. \qquad \text{(3 Punkte)}$$

Aufgabe 12: (4+4+4 Punkte)
Läßt sich das skalare Newton-Verfahren mit dem Startwert $x_0 = 1$ anwenden auf

$$f(x) = |x|, \qquad g(x) = x^2, \qquad h(x) = \frac{x \log(x)}{\sin(x)}?$$

Wenn ja, wie verhält sich das Newton-Verfahren? Wenn die Iterierten gegen eine etwaige Nullstelle konvergieren, mit welcher Konvergenzordnung?

Lösung zu Aufgabe 12: Das skalare Newton-Verfahren für eine Funktion f ist gegeben als

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Damit ist es genau dann anwendbar, wenn $f'(x_n)$ ungleich Null ist. Im Falle der ersten Funktion gilt

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{1}{1} = 0.$$

Dieses ist bereits die einfache Nullstelle. Also konvergieren die Iterierten des skalare Newton-Verfahrens in einem Schritt, also mit jeder Konvergenzordnung. (4 Punkte)
Im Falle der zweiten Funktion gilt

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2}{2x_n} = x_n - \frac{x_n}{2} = \frac{x_n}{2} = \frac{1}{2^n} x_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Damit konvergieren die Iterierten aus dem skalaren Newton-Verfahren Q-linear gegen die doppelte Nullstelle $\hat{x} = 0$. (4 Punkte)
Im Falle der dritten Funktion gilt $h(x_0) = h(1) = 0$. Also benötigt man das Newton-Verfahren überhaupt nicht mehr, es konvergiert also auch wieder mit jeder Konvergenzordnung. Würde man es trotzdem anwenden, so würde es bei der Nullstelle stagnieren. (4 Punkte)