

# Klausur zur Vordiplom-Prüfung

## Numerische Verfahren

17. März 2005

Sie haben **90** Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

**Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer in DRUCKSCHRIFT!!**

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **Druckschrift** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

<b>Name:</b>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<b>Vorname:</b>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<b>Matr.-Nr.</b>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

Ich bin darüber belehrt worden, daß meine Ausarbeitung nur dann als Prüfungsleistung bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Lösen Sie die folgenden 12 Aufgaben!

<b>Aufgabe</b>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<b>Punkte</b>												

$\Sigma$	<input type="text"/>
----------	----------------------

**Aufgabe 1:** (4+2 Punkte)

Stellen Sie die allgemeine Form eines expliziten Runge-Kutta Verfahrens mit  $s$  Stufen auf. Verwenden Sie ruhig die Bezeichnungen  $k_j$ ,  $\alpha_j$ ,  $\beta_{j\ell}$  und  $\gamma_j$  des Skriptes. Was ist die Stufe, was die Ordnung eines Runge-Kutta Verfahrens?

**Lösung zu Aufgabe 1:** Ein allgemeines explizites Runge-Kutta Verfahren ist durch die folgenden Vorschriften gegeben:

$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad (1)$$

$$k_j = f\left(x_n + h_n \alpha_j, y_n + h_n \sum_{\ell=1}^{j-1} \beta_{j\ell} k_\ell\right), \quad j = 2, \dots, s, \quad (2)$$

$$y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{j=1}^s \gamma_j k_j. \quad (3)$$

(4 Punkte)

Dabei ist  $s$  die *Stufe*, d.h., die Anzahl der geschachtelten Näherungen  $k_j$  für Steigungen. Die Stufe gibt Informationen über den Aufwand eines Schrittes aus. Die *Ordnung*  $p$  eines Runge-Kutta Verfahrens ist um Eins kleiner als die kleinste Potenz  $p+1$  in der Schrittweite  $h$ , mit der sich die Fehlerfunktion  $\varepsilon(h) = O(h^{p+1})$  eines Runge-Kutta Verfahrens für hinreichend glatte rechte Seiten  $f$  entwickeln läßt. (2 Punkte)

**Aufgabe 2:** (2+2 Punkte)

Wie schnell konvergiert die Potenzmethode angewandt auf die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

mit den Startvektoren  $v$  und  $w$  gegeben als

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegen einen Eigenwert?

**Lösung zu Aufgabe 2:** Die Potenzmethode mit Skalierung in Richtung eines Hilfsvektors  $\ell$  und der Eigenwertnäherung gegeben als Anteil in Richtung von  $\ell$  ist durch den folgenden Algorithmus (Algorithmus 6.11 im Skript von 2004) gegeben:

```

 $u_0 = v, w$ 
 $k_0 = \ell^H u_0$ 
for  $m = 0, 1, \dots$  until convergence do
     $v_{m+1} = Au_m$ 

```

$$\begin{aligned}
k_{m+1} &= \ell^H v_{m+1} \\
u_{m+1} &= v_{m+1}/k_{m+1}
\end{aligned}$$

**end**

In diesem Algorithmus konvergieren unter bestimmten Voraussetzungen die Vektoren  $u_m$  gegen den Eigenvektor zum dominanten Eigenwert, welcher zeitgleich durch  $k_m$  genähert wird.

Der Vektor  $v$  ist ein Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda_1 = 1$ . Die Potenzmethode reproduziert den Eigenvektor und den Eigenwert. Je nach Abbruchkriterium benötigt die Potenzmethode also keinen oder einen Schritt. (2 Punkte)

Der Vektor  $w$  ist zwar kein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_2 = 2$ , aber der Rayleigh-Quotient mit  $A$  ergibt den Wert 2,

$$\frac{w^H A w}{w^H w} = \frac{2}{1} = 2.$$

Demnach ist die Potenzmethode also bereits am Ziel, was die Eigenwertnäherung mittels des Rayleigh-Quotienten angeht. Allerdings ist der Eigenvektor nicht korrekt. Eine Bemerkung aus dem Skript (Bemerkung 6.13, Punkt 7 aus dem Skript von 2004) gibt allerdings die Konvergenzrate der Potenziteration gegen einen Eigenwert wieder. Mit

$$q = \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right| = \frac{1}{2}$$

gilt

$$|k_{m+1} - \lambda_2| \leq C q^m,$$

also haben wir lineare Konvergenz mit dem Konvergenzfaktor  $q = 1/2$ . (2 Punkte)

Ein auf Einheitslänge skalierter Eigenvektor  $v_2$  zum Eigenwert  $\lambda_2 = 2$  ist gegeben durch

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eine kurze direkte Rechnung zeigt

$$A^m = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot (\sum_{j=0}^{m-1} 2^j) \\ 0 & 2^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{j=1}^m 2^j \\ 0 & 2^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2(2^m - 1) \\ 0 & 2^m \end{pmatrix}.$$

Damit gilt dann mit Skalierung nach der zweiten Komponente ( $\ell = w = (0, 1)^T$ ):

$$u_m = \frac{A^m w}{\ell^H A^m w} = \frac{\begin{pmatrix} 2(2^m - 1) \\ 2^m \end{pmatrix}}{2^m} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2^{m-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$k_m = \ell^H A u_m = \frac{\ell^H A^{m+1} w}{\ell^H A^m w} = \frac{2^{m+1}}{2^m} = 2. \quad (5)$$

Also konvergiert das Verfahren wie erwartet linear, dank der glücklichen Wahl des Vektors  $\ell$  erhalten wir im zweiten Fall konstant die "Eigenwertnäherung" 2, welche exakt dem zweiten Eigenwert entspricht.

**Aufgabe 3:** (2+2+2 Punkte)

Ist das skalare Newton-Verfahren mit dem Startwert  $x_0 = 1$  anwendbar auf die folgenden reellen Funktionen?

$$f(x) = |x|, \quad g(x) = |x|^2, \quad h(x) = |x - 1|^2.$$

Wenn ja, wie schnell konvergiert es? Begründen Sie Ihre Antworten.

**Lösung zu Aufgabe 3:** Die erste Funktion ist nicht überall stetig differenzierbar. Das verhindert aber nicht die Anwendung des skalaren Newton-Verfahrens

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

solange die Ableitung immer definiert und ungleich Null ist. Die Ableitung der gegebenen Funktion ist nur im Punkte Null nicht definiert, es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x > 0, \\ -1, & \text{wenn } x < 0. \end{cases}$$

Der Startwert  $x_0$  liegt auf der positiven Halbachse. Das skalare Newton-Verfahren verwendet implizit die Taylor Approximation erster Ordnung, also wird die Gerade  $x$  auf der positiven Halbachse exakt wiedergegeben und deren Nullstelle  $x_1 = 0$  als nächster Wert zurückgegeben. Dieses ist bereits die Nullstelle, also ist das Newton-Verfahren bereits nach einem Schritt konvergiert. (2 Punkte)

Die zweite Funktion ist unendlich oft stetig differenzierbar, da

$$g(x) = |x|^2 = x^2.$$

Eine kleine Rechnung (oder die Anwendung von Satz 7.16 aus dem Skript von 2004) zeigt die lineare Konvergenz. Es gilt

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2}{2x_n} = x_n - \frac{x_n}{2} = \frac{x_n}{2} = \frac{x_0}{2^n} = \frac{1}{2^n}.$$

(2 Punkte)

Die dritte Funktion ist ebenso unendlich oft stetig differenzierbar, da

$$h(x) = |x - 1|^2 = (x - 1)^2.$$

Der Startwert ist bereits eine Nullstelle, also ist das Verfahren bereits im nullten Schritt konvergiert. Interessanterweise ist es auch nicht mehr durchführbar, da auch die Ableitung dort eine Nullstelle hat. (2 Punkte)

**Aufgabe 4:** (2+3 Punkte)

Ist der Punkt  $(1, 1)^T$  ein Fixpunkt der Funktion  $\phi$ ? Die Funktion  $\phi$  ist gegeben als

$$\phi(x, y) = (x, 3x - 2y)^T.$$

Wenn ja, ist er anziehend oder abstoßend? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Lösung zu Aufgabe 4:** Einfaches Einsetzen zeigt,

$$\phi(1, 1) = (1, 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1)^T = (1, 1)^T,$$

dass der Punkt  $(1, 1)^T$  ein Fixpunkt ist. (2 Punkte)

Die Funktion  $\phi$  ist eine lineare Funktion,

$$\phi(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Damit ist klar, dass die Abbildung  $\phi$  jedes skalare Vielfache  $(\lambda, \lambda)^T$  von  $(1, 1)^T$  auf sich selber abbildet, da

$$\phi(\lambda, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \phi(1, 1).$$

Damit wird aber insbesondere die Gerade

$$\{(\lambda, \lambda)^T : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

durch den Punkt  $(1, 1)^T$  auf sich selber abgebildet. Damit kann es keine Umgebung geben, in der alle Punkte durch die Fixpunktiteration gegen den Fixpunkt konvergieren, und auch keine, in der alle Punkte aus der Umgebung herausführen. Damit ist dieser Fixpunkt *weder* anziehend, *noch* abstoßend. (3 Punkte)

**Aufgabe 5:** (2+3 Punkte)

Was ist das gedämpfte Gauß-Newton-Verfahren? Führen Sie ausgehend von  $\mathbf{x}^0 = (1, 1)^T$  einen Schritt des gedämpften Gauß-Newton-Verfahrens angewandt auf das nichtlineare Ausgleichsproblem

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\|_2 = \min$$

für die Funktion

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \mathbf{f} &: (x, y)^T \mapsto (x^2 + 1, y^2 + 1, 3x^2 - 2x^3)^T \end{aligned}$$

mit  $\mathbf{y} = (1, 1, 1)^T$  aus.

**Lösung zu Aufgabe 5:** Das gedämpfte Gauß-Newton-Verfahren dient zur Lösung des nichtlinearen Ausgleichsproblems. In diesem Verfahren wird die nichtlineare Funktion in einem gegebenen Startwert linearisiert und dann ein linearer Ausgleich durchgeführt. Die Lösung wird als Update behandelt und solange durch Zwei geteilt, bis der Startwert plus Update eine Verbesserung darstellt.

Angewandt auf ein gegebenes Problem heißt das: Löse

$$\|\mathbf{f}'(\mathbf{x}^0)\boldsymbol{\xi} - (\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0))\|_2 = \min \quad (6)$$

und bestimme das minimale  $\ell \in \mathbb{N}_0$  mit

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0 + 2^{-\ell}\boldsymbol{\xi})\|_2^2 < \|\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)\|_2^2. \quad (7)$$

Danach wird der Wert  $\mathbf{x}^0 + 2^{-\ell}\boldsymbol{\xi}$  als neuer Wert  $\mathbf{x}^1$  behandelt und das Verfahren iteriert. (2 Punkte)

In dem gegebenen Fall benötigen wir also das Residuum

$$\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1^2 + 1 \\ 1^2 + 1 \\ 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und die Jacobimatrix von  $\mathbf{f}$

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \\ 6x - 6x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

ausgewertet an der Stelle  $\mathbf{x}^0$ ,

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun müssen wir das lineare Ausgleichsproblem aus Gleichung (6),

$$\left\| \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = \min$$

lösen, welches die leicht ersichtliche Lösung

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

hat. In der Liniensuche für ein verkleinerndes Update, Gleichung (7) testen wir zuerst, ob für  $\ell = 0$  bereits eine Verbesserung erfolgt. Wir setzen dazu versuchsweise

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 + \boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

und testen die Bedingung:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x}^1)\|_2^2 &= \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.25 \\ 1.25 \\ 0.5 \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} -0.25 \\ -0.25 \\ 0.5 \end{pmatrix} \right\|_2^2 \\ &= \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8} \\ \|\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)\|_2^2 &= \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2^2 = 2\end{aligned}$$

Da

$$\frac{3}{8} < \frac{4}{8} = \frac{1}{2} < 2,$$

ist das so gesetzte  $\mathbf{x}^1$  auch gleich der nächste Wert für die Iteration. (3 Punkte)

**Aufgabe 6:** (2+2 Punkte)

Geben Sie eine obere Schranke für den Betrag des größten Eigenwertes der folgenden Matrizen an:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon & \epsilon^2 \\ -\epsilon & 1 & -\epsilon \\ \epsilon^2 & -\epsilon & 1 \end{pmatrix}, \quad \epsilon \in \mathbb{R}.$$

Begründen Sie Ihre Antworten.

**Lösung zu Aufgabe 6:** Jede (einer Vektornorm zugeordnete) Matrixnorm von einer Matrix  $A$  ist eine obere Schranke für den größten Absolutbetrag der Eigenwerte, da mit einem Eigenvektor  $v$  gilt

$$Av = v\lambda, \quad |\lambda||v| = \|Av\| \leq \|A\||v|,$$

also

$$|\lambda| \leq \|A\|.$$

Der Satz von Gerschgorin ist auch anwendbar und liefert meist ähnliche Resultate.

Die Einsnorm (Spaltensummenorm) liefert die Schranken

$$|\lambda(B)| \leq \|B\|_1 = 18, \quad |\lambda(C)| \leq \|C\|_1 = 1 + |\epsilon| + \max\{|\epsilon|, \epsilon^2\}.$$

Die Unendlichnorm (Zeilensummennorm) liefert die Schranken

$$|\lambda(B)| \leq \|B\|_\infty = 24, \quad |\lambda(C)| \leq \|C\|_\infty = 1 + |\epsilon| + \max\{|\epsilon|, \epsilon^2\}.$$

Der Satz von Gerschgorin liefert dieselben Schranken. (je Matrix 2 Punkte)

**Aufgabe 7:** (2+2 Punkte)

Was ist die Pseudoinverse einer rechteckigen Matrix? Bestimmen Sie die Pseudoinverse der folgenden Matrizen:

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Lösung zu Aufgabe 7:** Die Pseudoinverse einer (möglicherweise rechteckigen) Matrix  $A$  ist die eindeutige Matrix  $A^\dagger$ , die einer gegebenen rechten Seite  $b$  die (eindeutig bestimmte) Pseudonormallösung

$$\|Ax - b\|_2 = \min, \quad \|x\|_2 = \min$$

zuordnet. Die Pseudoinverse ist bei vollem Spaltenrang gegeben durch  $(A^H A)^{-1} A^H$ , wie sich leicht aus den Normalgleichungen herleiten läßt. Im Allgemeinen läßt sie sich aus der SVD von  $A$  ( $A = U \Sigma V^H$ ) bestimmen als

$$A^\dagger = V \Sigma^\dagger U^H, \quad \Sigma^\dagger = \begin{cases} \left( \frac{\delta_{ij}}{\sigma_j} \right)_{ij}, & \sigma_j > 0, \\ (0 \cdot \delta_{ij})_{ij}, & \sigma_j = 0. \end{cases}$$

(2 Punkte)

Da beide Matrizen vollen Spaltenrang haben, ergibt sich

$$D^\dagger = (D^H D)^{-1} D^H = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

und

$$F^\dagger = (F^H F)^{-1} F^H \tag{8}$$

$$= \left( \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

(je Matrix 1 Punkt)

**Aufgabe 8:** (4 Punkte)

Berechnen Sie die Pseudonormallösung des linearen Ausgleichsproblems

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|_2 = \min.$$



Geben Sie den Lösungsweg bitte mit an.

**Lösung zu Aufgabe 8:** Die Pseudoinverse  $F^\dagger$  bildet die rechte Seite  $D = (1, 2, 3)^T$  auf die Pseudonormallösung ab. Diese Pseudoinverse wurde unter anderem in der vorherigen Aufgabe bereits berechnet. Es gilt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F^\dagger D = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Alternativ könnte man auch die QR Zerlegung oder die SVD oder die Normalgleichungen verwenden. (4 Punkte)

**Aufgabe 9:** (3 Punkte)

Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Lösung zu Aufgabe 9:** Die Cholesky Zerlegung einer symmetrischen positiv definiten Matrix  $G$  ist gegeben durch  $G = CC^T$ , wobei die Matrix  $C$  (der Cholesky Faktor) eine untere Dreiecksmatrix mit positiver Diagonale ist. Wir berechnen die Cholesky Zerlegung direkt, ohne den Algorithmus zu kennen. Es muß gelten

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = CC^T = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 + z^2 \end{pmatrix}.$$

Daraus und aus der Vorzeicheninformation der Elemente  $x, z$  berechnet man schnell die Größen  $x, y, z$  zu

$$x = \sqrt{2}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad z = \sqrt{\frac{3}{2}},$$

und der Cholesky Faktor ist somit durch die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$$

gegeben. (3 Punkte)

**Aufgabe 10:** (3+2+2+2 Punkte)

Wann ist eine Matrix positiv definit? Sind die folgenden Matrizen positiv definit?

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie Ihre Antworten.

**Lösung zu Aufgabe 10:** Eine Matrix  $A$  ist genau dann positiv definit, wenn  $A = A^H$  und eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- $x^H Ax > 0$  für alle  $x \neq 0$  (Definition),
- alle Eigenwerte  $> 0$ ,
- alle Hauptunterabschnittsdeterminanten  $> 0$ ,
- alle führenden Hauptunterabschnittsdeterminanten  $> 0$ ,
- $A$  hat eine Cholesky Zerlegung (numerisch stabil und billig).

(3 Punkte)

Die Matrizen sind alle Hermitesch ( $A = A^H$ ). Die vorletzte Bedingung ist in diesem niedrigdimensionalen Fall am leichtesten zu überprüfen. Die führende  $1 \times 1$  Matrix hat in allen drei Fällen eine positive Determinante. Also muß nur noch die Gesamtdeterminante größer Null sein.

Man rechnet leicht nach, dass

$$H = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3, \quad (12)$$

$$J = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3, \quad (13)$$

$$K = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3. \quad (14)$$

Damit ist  $H$  nicht positiv definit,  $J$  und  $K$  sind positiv definit. Da  $K = G$ , wobei  $G$  aus der letzten Aufgabe stammt, ist  $K$  Cholesky-zerlegbar und damit auch positiv definit. (je Matrix 2 Punkte)

**Aufgabe 11:** (2+2+2+1 Punkte)

Wozu dient das Verfahren der Bisektion? Geben Sie den Algorithmus der Bisektion und eines besseren Verfahrens an. Beschreiben bzw. motivieren Sie die von Ihnen angegebene Verbesserung und die dahinter liegende Idee mit Ihren eigenen Worten.

**Lösung zu Aufgabe 11:** Das Verfahren der Bisektion dient dazu eine Nullstelle einer stetigen skalaren reellen Funktion  $f$  in einem Intervall  $[x_1, x_2]$  einzuschließen, wobei notwendigerweise  $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$  gelten muß, i.e., ein Vorzeichenwechsel in dem Intervall vorliegen muß. (2 Punkte)

Ein Algorithmus für die Bisektion sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} y_1 &= f(x_1), & y_2 &= f(x_2) \\ \mathbf{repeat} \\ & x_3 = (x_1 + x_2)/2, & y_3 &= f(x_3) \end{aligned}$$

```

if  $y_2 \cdot y_3 < 0$ 
     $x_1 = x_3, \quad y_1 = y_3$ 
else
     $x_2 = x_3, \quad y_2 = y_3$ 
end
until  $|x_2 - x_1| < \text{gegebene Toleranz}$ 
(2 Punkte)

```

Eine Verbesserung stellt die regula falsi

```

 $y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2)$ 
repeat
     $x_3 = x_2 - y_2 \cdot (x_2 - x_1) / (y_2 - y_1), \quad y_3 = f(x_3)$ 
    if  $y_2 \cdot y_3 < 0$ 
         $x_1 = x_3, \quad y_1 = y_3$ 
    else
         $x_2 = x_3, \quad y_2 = y_3$ 
    end
until  $|x_2 - x_1| < \text{gegebene Toleranz}$ 

```

und darauf aufbauend das Illinois Verfahren dar:

```

 $y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2)$ 
repeat
     $x_3 = x_2 - y_2 \cdot (x_2 - x_1) / (y_2 - y_1), \quad y_3 = f(x_3)$ 
    if  $y_2 \cdot y_3 < 0$ 
         $x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2, \quad x_2 = x_3, \quad y_2 = y_3$ 
    else
         $x_2 = x_3, \quad y_2 = y_3, \quad y_1 = 0.5 \cdot y_1$ 
    end
until  $|x_2 - x_1| < \text{gegebene Toleranz}$ 
(2 Punkte)

```

Die regula falsi nutzt die berechneten Funktionswerte aus, während im Verfahren der Bisektion nur die Vorzeicheninformation verwendet wurde. Dadurch liegt der neue Wert nicht mehr notwendigerweise im Mittelpunkt zwischen zwei alten Werten, und das Verfahren konvergiert häufig schneller.

Das dadurch aber öfter auftretende "Hängenbleiben" der Iteration bei monotonen Funktionen wird im Illinois Verfahren durch die Halbierung des Funktionswertes in eben diesem Falle behoben. Während Bisektion R-linear konvergiert, konvergiert das Illinois Verfahren mit der R-Konvergenzordnung  $\sqrt[3]{3}$ . (1 Punkt)

**Aufgabe 12:** (2+2 Punkte)

Geben Sie die allgemeine Form des Interpolationspolynomes nach Lagrange an. Interpolieren Sie damit die Daten

$$\begin{array}{c|ccc} x_i & 1 & 2 & 3 \\ \hline y_i & 1 & 0 & 1 \end{array}.$$

Hinweis: Sie müssen das Interpolationspolynom nicht auf eine Normalform bringen.

**Lösung zu Aufgabe 12:** Die allgemeine Form des Interpolationspolynomes nach Lagrange hat die Gestalt

$$p(x) = \sum_{j=0}^n y_j \ell_j(x),$$

wobei die Lagrange-Basispolynome durch die Eigenschaft, Polynome vom Höchstgrad  $n$  zu sein, und durch die Bedingungen

$$\ell_j(x_i) = \delta_{ij}, \quad j = 0, \dots, n$$

eindeutig zu

$$\ell_j(x) = \frac{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (x - x_i)}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (x_j - x_i)}$$

bestimmt sind. (2 Punkte)

Das Interpolationspolynom zu dem gegebenen Datensatz ergibt sich somit wie folgt:

$$\begin{aligned} p(x) &= 1 \cdot \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + 0 \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + 1 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} \\ &= \frac{x^2 - 5x + 6}{2} + \frac{x^2 - 3x + 2}{2} \\ &= x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2. \end{aligned}$$

(2 Punkte)