Technische Universität Hamburg-Harburg **SS 2004**
Arbeitsbereich Mathematik
Dr. Jens-Peter M. Zemke

Klausur zur Vordiplom-Prüfung

Numerische Verfahren

30. Juli 2004

Sie haben **90** Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer in DRUCKSCHRIFT!!

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **Druckschrift** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:														
Vorname:														
Matr.-Nr.														

Ich bin darüber belehrt worden, dass meine Ausarbeitung nur dann als Prüfungsleistung bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Lösen Sie die folgenden 12 Aufgaben!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Punkte												

Σ	

Aufgabe 1: (2 Punkte)
Was ist Auslöschung? Geben Sie ein Beispiel an, in dem eine Auslöschung auftritt.

Lösung zu Aufgabe 1: Auslöschung ist die massive Verstärkung des relativen Fehlers durch die Operation $+$ bei betragsmäßig nahezu gleich großen Operanden mit entgegengesetztem Vorzeichen. Oder alternativ, bei der Operation $-$ mit gleichem Vorzeichen. (1 Punkt)

Beispiele gibt es viele, z.B. in der numerischen Differentiation oder in der Quadratur bei den höheren Newton-Cotes Formeln. (1 Punkt)

Aufgabe 2: (3=1+2 Punkte)
Was ist Interpolation? Interpolieren Sie die Daten

y_i	1	2	3	4	6
x_i	1	2	3	4	5

mittels Polynominterpolation.

Lösung zu Aufgabe 2: Interpolation ist die Berechnung einer Funktion p aus einer gegebenen Funktionenklasse (z.B. den Polynomen, den Splines, rationalen Funktionen) die endlich viele ($i \in I$) gegebene Daten (Funktionswerte y_i und möglicherweise auch gegebene Ableitungen) an gegebenen Stützstellen x_i annimmt, im Fall daß keine Ableitungen vorgegeben sind also

$$p(x_i) = y_i \quad \forall\, i \in I.$$

(1 Punkt)

Die Polynominterpolation für den gegebenen Datensatz erfolgt z.B. über die Newtonsche Form der Polynominterpolation. Man sieht leicht, daß das (im Falle der Polynominterpolation eindeutige) Interpolationspolynom (vom Höchstgrade 3) durch die ersten vier Daten die Gerade $p_{03}(x) = x$ ist. Nun findet man analog zur Vorgehensweise im Skript das Interpolationspolynom vom Höchstgrade 4 zu allen Daten in der Form

$$p_{04}(x) = p_{03}(x) + \alpha(x-1)(x-2)(x-3)(x-4),$$

wobei α aus $p_{04}(5) = 6$, also aus

$$6 = 5 + \alpha(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)$$

eindeutig bestimmt ist zu

$$\alpha = \frac{6-5}{(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)} = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}.$$

Damit lautet das Interpolationspolynom zu den gegebenen Daten

$$p_{04}(x) = x + \frac{1}{24}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4).$$

(2 Punkte)

Aufgabe 3: (2 Punkte)
Was bedeuten Δ, p und q in der Notation $S(\Delta, p, q)$ des Funktionenraumes der Splines?

Lösung zu Aufgabe 3: Splines sind stückweise polynomiale Funktionen. Die Notation schlüßelt sich auf wie folgt: Δ steht für eine Zerlegung auf der reellen Achse, also für eine endliche Anzahl von geordneten Punkten in einem Intervall $[a, b]$ der Form $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Bezeichne s den Spline. Dann sind die Funktionen $s\big|_{[x_i, x_{i+1}]}$ Polynome vom Maximalgrad p, und an den Knoten x_i ist der Spline (mindestens) q mal stetig differenzierbar.

Aufgabe 4: (4=2+2 Punkte)
Für welche Zerlegung ist die Funktion

$$s(x) = x^3 + (x-2)_+^3 + (x-4)_+^3$$

ein Spline aus $S(\Delta, 3, 2)$? Ist die Funktion

$$s(x) = x^3 + (x-2)_+^3 + (x-4)_+$$

bezüglich dieser Zerlegung ein Spline aus $S(\Delta, 3, 2)$? Begründen Sie Ihre Antworten.

Lösung zu Aufgabe 4: Um diese Aufgabe zu lösen, muß man eine Zerlegung finden, so daß die angegebene Funktion in jedem Intervall zwischen zwei Knoten mit einem (möglicherweise in jedem Intervall verschiedenen) Polynom maximal dritten Grades übereinstimmt. Zusätzlich sollte die angegebene Funktion in den Knoten zweimal stetig differenzierbar sein.

Man sieht schnell, daß nur die Punkte 2 und 4 Probleme bereiten, da dort eine Betragsfunktion hinzukommt. Es gibt jetzt zwei Möglichkeiten. Erstens kann man diese Punkte aussparen, also falls $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ die Zerlegung bezeichnet entweder a oder b mit $4 \leqslant a$ oder $b \leqslant 2$ wählen. Zweitens kann man diese Punkte in die Zerlegung aufnehmen, also $x_i = 2$ und $x_j = 4$ für gegebene i und j.

Im ersten Fall handelt es sich für $4 \leqslant a$ in *jedem* Intervall und in jedem Knoten um die Funktion

$$s(x) = x^3 + (x-2)^3 + (x-4)^3$$

und für $b \leqslant 2$ in *jedem* Intervall und in jedem Knoten um die Funktion

$$s(x) = x^3.$$

Beide Funktionen sind kubische Polynome, also unendlich oft stetig differenzierbar und damit erst recht in jedem Intervall vom Grad 3 und in jedem Knoten (mindestens) 2 mal stetig differenzierbar.

Im zweiten Fall seien 2 und 4 als Knoten in der Zerlegung enthalten. Dann gilt für $x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$s(x) = \begin{cases} x^3, & x_{i+1} \leqslant 2 \\ x^3 + (x-2)^3, & 2 \leqslant x_i, x_{i+1} \leqslant 4 \\ x^3 + (x-2)^3 + (x-4)^3, & 4 \leqslant x_i \end{cases},$$

womit gezeigt ist, daß es sich in den Intervallstücken um kubische Polynome handelt. Die Differenzierbarkeit könnte nur in den Knoten 2 und 4 verletzt sein. Eine kurze Rechnung zeigt, daß wenn

$$f(x) = (x-c)_+^3 = \begin{cases} 0, & x \leqslant c, \\ (x-c)^3, & c \leqslant x. \end{cases},$$

dann

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant c, \\ 3(x-c)^2, & c \leqslant x. \end{cases} = 3((x-c)_+)^2$$

und schließlich

$$f''(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant c, \\ 6(x-c), & c \leqslant x. \end{cases} = 6(x-c)_+$$

gilt. Diese Funktionen sind alle stetig im Punkt c, welcher hier stellvertretend für einen der Knoten 2 oder 4 verwendet wurde. Also ist die Funktion $s = x^3 + (x-2)_+^3 + (x-4)_+^3$ mit der gewählten Zerlegung ein Spline aus $S(\Delta, 3, 2)$. (2 Punkte)

Die zweite Funktion ist je nach Wahl der Zerlegung ein Spline aus $S(\Delta, 3, 2)$ oder keiner. Im ersten Fall handelt es sich für $4 \leqslant a$ um das kubische Polynom

$$s(x) = x^3 + (x-2)^3 + (x-4),$$

für $b \leqslant 2$ um das kubische Polynom

$$s(x) = x^3.$$

Wenn der Punkt 2 ein Knoten ist, ist die Funktion dort auch hinreichend oft differenzierbar, aber wenn der Punkt 4 im Inneren des Intervalles $[a, b]$ liegt, auch wenn er ein Knoten ist, ist er dort nicht oft genug stetig differenzierbar, denn schon die erste Ableitung von

$$f(x) = (x-c)_+ = \begin{cases} 0, & x \leqslant c, \\ (x-c), & c \leqslant x, \end{cases}$$

ist im Punkt c nicht mehr stetig,

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant c, \\ 1, & c \leqslant x. \end{cases}$$

(2 Punkte)

Aufgabe 5: (5=1+1+3 Punkte)
Wie sieht der QR Algorithmus in der Grundform aus? Was gilt für die Eigenwerte der erzeugten Matrizen A_i? Geben Sie eine Konvergenzaussage wieder.

Lösung zu Aufgabe 5: Der QR Algorithmus lautet in der Grundform:

$$\begin{aligned}
&A_0 = A \\
&\text{for } i = 0, 1, \dots \\
&\quad A_i = Q_i R_i, \\
&\quad A_{i+1} = R_i Q_i \\
&\text{end for}
\end{aligned}$$

(1 Punkt)
Die Matrizen A_i sind wegen

$$A_{i+1} = R_i Q_i = Q_i^H A_i Q_i$$

unitär ähnlich, also bleiben die Eigenwerte unverändert. (1 Punkt)

Seien alle Eigenwerte von A betragsmäßig verschieden und ungleich Null. Dann konvergiert der QR Algorithmus im Wesentlichen, d.h.,

$$\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \lambda_\pi(i), & i = j, \\ 0, & i > j. \end{cases}$$

Die Notation $\pi(i)$ sagt aus, daß die Eigenwerte permutiert auf der Diagonalen auftauchen. Über die Elemente von A_i im oberen Dreieck wird hierbei nichts ausgesagt. (3 Punkte)

Aufgabe 6: (4=1+1+1+1 Punkte)
Was geschieht, wenn Sie den QR Algorithmus in der Grundform auf die folgenden Matrizen anwenden?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung zu Aufgabe 6: Die beiden Matrizen A und B sind bereits obere Dreiecksmatrizen. Eine QR Zerlegung einer Dreiecksmatrix R ist durch $R = IR$ gegeben. Damit ergeben sich die Quantitäten im QR Algorithmus zu $A_i = R_i = A_0$,

$Q_i = I$ für alle $i \geqslant 0$. Die beiden Matrizen U und V sind Permutationsmatrizen, also insbesondere unitär. Die QR Zerlegung einer unitären Matrix Q ist durch $Q = QI$ gegeben. Damit ergeben sich die Quantitäten im QR Algorithmus zu $A_i = Q_i = A_0$, $R_i = I$ für alle $i \geqslant 0$. In anderen Worten, der QR Algorithmus ist für die ersten beiden Matrizen bereits nach Null Schritten konvergiert, für die anderen beiden Matrizen konvergiert er nie. Dabei ist der QR Algorithmus für die letzte Matrix blockweise schon konvergiert, die letzten beiden Eigenwerte gleich Eins sind auf der Diagonalen ablesbar, die Werte im Dreieck darunter sind bereits Null. (pro Matrix 1 Punkt)

Aufgabe 7: (5=2+1+1+1 Punkte)
Geben Sie bitte möglichst genau an, wo die Eigenwerte der folgenden Matrizen liegen:

$$T = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \epsilon & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \epsilon = 10^{-16}.$$

Lösung zu Aufgabe 7: Zur Matrix T: Der Satz von Gerschgorin liefert die Kreise $|z - 10| \leq 2$, die Symmetrie der Matrix zusätzlich die reelle Achse, also das Intervall $[8, 12]$. Die wirklichen Eigenwerte kann man aber sogar explizit angeben, da die Matrix tridiagonal Toeplitz ist. Sie sind im Falle einer beliebigen tridiagonalen Toeplitzmatrix

$$T_n(a, b, c) = \begin{pmatrix} b & c & & \\ a & b & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c \\ & & a & b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

gegeben durch

$$\lambda_k = b + 2\sqrt{ac} \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \quad k = 1, \ldots, n,$$

also in unserem Falle durch

$$\lambda_k = 10 + 2\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right), \quad k = 1, \dots, 4,$$

(2 Punkte)

Zur Matrix C: Die Eigenwerte sind nach dem Satz von Schur aus dem Skript ablesbar. Die Matrix ist blockdiagonal, und die Blöcke selber sind wiederum blockdiagonal. Der erste Block hat die Eigenwerte 1 und 3, der zweite Block die Eigenwerte 4 und 6. (1 Punkt)

Die Matrix F ist eine Ähnlichkeitstransformation der mittleren Matrix, also sind die Eigenwerte gegeben durch 1, 2, 4 und 5. (1 Punkt)

Die Eigenwerte von G lassen sich leicht mittels des charakteristischen Polynomes (z.B. durch Laplace-Entwicklung der Determinante der Matrix

$$G - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ \epsilon & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

nach der letzten Zeile) berechnen und sind gegeben durch die Nullstellen von

$$\begin{aligned} \chi_G(z) &= (-1)^{4+1}\epsilon \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4}(-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\epsilon + \lambda^4, \end{aligned}$$

also durch die (vier) vierten Wurzeln aus ϵ, also durch $10^{-4}, -10^{-4}, i \cdot 10^{-4}$ und $-i \cdot 10^{-4}$. (1 Punkt)

Aufgabe 8: (6=2+2+2 Punkte)
Konvergiert das Newton Verfahren mit dem Startwert $x_0 = 1$ für die folgenden drei Funktionen?

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = 5 - 4x, \quad h(x) = (5 - 4x)x^4.$$

Wenn ja, wie schnell?

Lösung zu Aufgabe 8: Das (skalare) Newton-Verfahren berechnet die Iterierten gemäß

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

also im ersten Falle durch

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2}{2x_n} = \frac{x_n}{2} = \frac{x_n}{2}.$$

Also konvergiert das Newton-Verfahren in diesem Falle (Q-)linear. Das hätte man auch schnell sehen können, indem man den Satz über das Newton-Verfahren und mehrfache Nullstellen herangezogen hätte. (2 Punkte)

Das zweite Beispiel ist eine Geradengleichung. Das Newton-Verfahren liefert die lineare Approximation der Funktion, also die Funktion selber. Also konvergiert in diesem Falle das Newton-Verfahren in einem Schritt. (2 Punkte)

Der letzte Fall ist gemein: Die Ableitung von h ist im Startpunkt gleich Null. Also ist das Newton-Verfahren nicht durchführbar und konvergiert somit auch nicht mit einer irgendwie gearteten Geschwindigkeit. (2 Punkte)

Aufgabe 9: (4=2+2 Punkte)
Bestimmen Sie die Kondition bezüglich der Maximumnorm der Matrizen

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung zu Aufgabe 9: Beide Matrizen sind orthogonal. Also ist die Inverse gegeben durch die Transponierte. Die Maximumnorm, oder auch Zeilensummennorm ist definiert als Maximum über die Zeilen der Summen der Beträge einer Zeile. Die Kondition ist gegeben durch $\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$. Damit ergibt sich

$$\kappa_\infty(P) = 1, \qquad \kappa_\infty(Q) = \frac{25}{9} \approx 2.7778.$$

(pro Matrix 1 Punkt für $\|A\|$ und ein Punkt für $\|A^{-1}\|$)

Aufgabe 10: (4 Punkte)
Welche Fehlerordnung hat die folgende Quadraturformel?

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx Q(f) := \frac{1}{3} f(\frac{3}{10}) + \frac{2}{3} f(\frac{6}{10})$$

Lösung zu Aufgabe 10: Die Fehlerordnung ist der minimale Grad des Polynomes, das gerade nicht mehr exakt integriert wird. Da die Polynome einen Vektorraum bilden und die Integration eine lineare Abbildung ist, kann man sich auf die Monome als Testfunktionen beschränken:

$$\begin{array}{rcccccl} 1 & = & \displaystyle\int_0^1 x^0\,dx & = & \displaystyle\frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}\right)^0+\frac{2}{3}\left(\frac{6}{10}\right)^0 & = & 1, \\[2ex] \displaystyle\frac{1}{2} & = & \displaystyle\int_0^1 x^1\,dx & = & \displaystyle\frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}\right)^1+\frac{2}{3}\left(\frac{6}{10}\right)^1 & = & \displaystyle\frac{1}{2}, \\[2ex] \displaystyle\frac{1}{3} & = & \displaystyle\int_0^1 x^2\,dx & \neq & \displaystyle\frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}\right)^2+\frac{2}{3}\left(\frac{6}{10}\right)^2 & = & \displaystyle\frac{27}{100}. \end{array}$$

Also hat die Quadraturformel die Fehlerordnung 2. (Je 1 Punkt pro Gleichung und 1 Punkt für die korrekte Bestimmung der Fehlerordnung)

Aufgabe 11: (4=2+2 Punkte)
Geben Sie ein allgemeines Kriterium für die Konsistenz von expliziten Runge–Kutta Verfahren an. Ist das folgende Einschrittverfahren konsistent?

$$y_{n+1} = y_n + h_n\frac{f(x_n, y_n) + f(x_n + h_n, y_n + h_n f(x_n, y_n))}{2}$$

Welche Ordnung hat dieses Einschrittverfahren?

Lösung zu Aufgabe 11: Das allgemeine Kriterium für Konsistenz von expliziten Runge–Kutta Verfahren steht als Satz im Skript und lautet

$$\sum_{j=1}^{s} \gamma_j = 1.$$

Damit ist das angegebene Verfahren konsistent. (2 Punkte)

Die Ordnung kann man bestimmen über die Taylor-Entwicklung der Funktion f, was für zweistufige explizite Runge-Kutta Verfahren im Skript durchgeführt wurde, oder man erkennt das Verfahren von Heun, welches im Skript als Verfahren der Ordnung 2 angegeben wurde, oder man weiß noch, daß sämtliche Verfahren der Stufe und Ordnung 2 durch die Gleichungen

$$\gamma_1 = 1 - \gamma_2, \quad \alpha_2 = \beta_{21} = \frac{1}{2\gamma_2}, \quad \gamma_2 \neq 0$$

charakterisiert werden. (2 Punkte)

Aufgabe 12: (4=2+2 Punkte)
Das Verfahren von Bogacki und Shampine ist ein explizites Runge–Kutta Verfahren mit der FSAL Eigenschaft. Sie haben aus dem Butcherschema nur die

folgenden Daten:

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\star & \frac{1}{2} & & & \\
\star & 0 & \frac{3}{4} & & \\
\star & \star & \star & \star & \\
\hline
p & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \\
\hline
q & \frac{11}{72} & \frac{5}{12} & \frac{5}{9} & -\frac{1}{8}
\end{array}
$$

Wie lauten die mit einem Sternchen ($\star$) markierten fehlenden Daten?

Lösung zu Aufgabe 12: FSAL (2 Punkte) und die Eigenschaft, daß $\alpha_i = \sum_j \beta_{ij}$ (2 Punkte) gelten soll, liefern uns die fehlenden Einträge:

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} & & \\
1 & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \\
\hline
p & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \\
\hline
q & \frac{11}{72} & \frac{5}{12} & \frac{5}{9} & -\frac{1}{8}
\end{array}
$$